

Покрyтия полосками

М. СМУРОВ, А. СПИВАК

Во второй части статьи доказана теорема Банга—Тарского: если выпуклая фигура F покрыта полосами, то ширина фигуры не превышает суммы ширин полос. Сформулированы гипотезы Банга и Дэвенпорта, рассказано о некоторых других проблемах комбинаторной геометрии.

Покрyтия круга и выход в пространство

Очевидно, круг диаметра d можно покрыть параллельными друг другу полосами, сумма ширин которых равна d (рис.31).

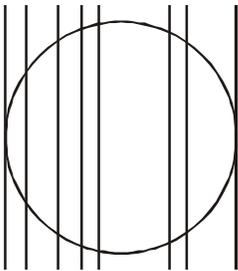


Рис. 31

Задача 5. Нельзя ли так расположить полосы разных направлений, чтобы они покрыли круг большего диаметра, чем сумма ширин полос?

Решение. Нельзя. Доказательство использует, как ни странно, выход в пространство.

Пусть круг диаметра d покрыт n полосами ширин w_1, w_2, \dots, w_n . Рассмотрим сферу, экватором которой служит этот круг, т. е. сферу, центр

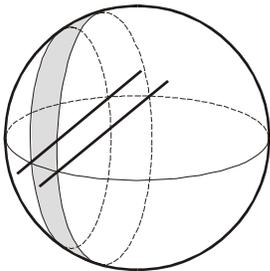


Рис. 32

и радиус которой совпадают с центром и радиусом круга (рис.32). Про-

ведя через границы полос плоскости, перпендикулярные экватору, сопоставим каждой полосе сферическую полосу (или шапочку, если круг пересечен только одной из ограничивающих полосу прямых).

Теперь используем замечательный (и известный уже Архимеду) факт: *площадь сферической полоски, высекаемой на сфере двумя параллельными плоскостями, выражается через расстояние w между плоскостями и диаметр d сферы формулой πdw* . (Обе плоскости, разумеется, должны пересекать сферу или хотя бы касаться ее.) Поскольку площадь сферы равна πd^2 и поскольку сфера должна быть полностью покрыта, имеем

$$\pi dw_1 + \pi dw_2 + \dots + \pi dw_n \geq \pi d^2,$$

откуда

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n \geq d. \quad (1)$$

Упражнение 21. В круге радиусом R расположен кружок радиусом r . Сколько прямых необходимо провести, чтобы хотя бы одна из них пересекла кружок? (Подразумевается, что мы видим круг, но не видим кружок.)

Указание. Прямая пересекает кружок в том и только том случае, когда центр кружка удален от нее не более чем на расстояние r , т. е. лежит в соответствующей полосе шириной $2r$.

Упражнение 22. Квадрат разрезали на прямоугольники. Может ли сумма меньших сторон прямоугольников оказаться меньше стороны квадрата?

Замечание. Это упражнение предлагалось десятиклассникам на московской олимпиаде 1998 года.

Упражнение 23. Докажите, что если квадрат покрыт полосами, то сумма ширин полос не может быть меньше стороны квадрата.

Указание. Впишите в квадрат круг.

Теорема Банга—Тарского

В 1932 году польский математик А.Тарский поставил задачу: доказать неравенство (1) для любой ограниченной выпуклой фигуры F .

В 1950 году датский математик Т. Банг решил эту задачу и поставил проблему, не решенную по сей день. Чтобы сформулировать ее, запишем

неравенство (1) в виде

$$\frac{w_1}{d} + \frac{w_2}{d} + \dots + \frac{w_n}{d} \geq 1,$$

где w_1, w_2, \dots, w_n — ширины полос, покрывающих выпуклую фигуру F , d — ширина фигуры F . Банг предложил делить ширину w_i полосы не на (наименьшую) ширину d , а на ширину d_i фигуры F в направлении i -й полосы:

$$\frac{w_1}{d_1} + \frac{w_2}{d_2} + \dots + \frac{w_n}{d_n} \geq 1. \quad (2)$$

Поскольку $\frac{w_i}{d} \geq \frac{w_i}{d_i}$, из неравенства (2) следует неравенство (1).

В 1991 году американский математик К. Болл доказал неравенство Банга (2) в случае, когда фигура F имеет центр симметрии.

Упражнение 24. В кубическом куске сыра имеется дырка — сферическая поверхность диаметром в $1/1998$ длины ребра. Каким минимальным числом плоских разрезов ее можно обнаружить? (Считайте, что кусок сыра после разрезания не распадается.)

План доказательства теоремы Банга—Тарского

Доказательство будем вести «от противного». Предположим, что выпуклая фигура F покрыта полосами, сумма ширин $w_1 + \dots + w_n$ которых меньше ширины d фигуры F .

Построим векторы $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, каждый из которых перпендикулярен границе соответствующей полосы и равен по длине ее ширине. Как и в решении задачи М1600 в первой части статьи (см. рис. 16), выбор одного из двух возможных (противоположных) направлений каждого из векторов \vec{v}_i произволен.

Поскольку сумма $w_1 + \dots + w_n$ ширин полос строго меньше ширины d фигуры, можно увеличить длину каждого из векторов \vec{v}_i таким образом, чтобы сумма длин полученных векторов по-прежнему была меньше d . Теперь длины векторов будут больше, чем ширины соответствующих полос: $|\vec{v}_i| > w_i$ при $i = 1, \dots, n$, но $|\vec{v}_1| + \dots + |\vec{v}_n| < d$.

Чтобы доказать теорему Банга–Тарского, мы введем понятие остова $S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, построенного по системе векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Мы докажем, что остов можно расположить внутри F . Для этого будет использована лемма о ширине пересечения выпуклой фигуры со своим сдвигом. Завершит доказательство теоремы применение леммы Банга.

Лемма Банга. Пусть каждому из векторов \vec{v}_i , где $i = 1, \dots, n$, поставлена в соответствие перпендикулярная полоса p_i , края которой перпендикулярны вектору \vec{v}_i , а ширина меньше $|\vec{v}_i|$. Тогда система полос p_1, \dots, p_n не покрывает остова $S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. (Более того, обязательно найдется вершина остова, не лежащая ни в одной из полос.)

Тот, кто преодолевает весь этот путь, будет приятно удивлен: все леммы не только являются этапами доказательства теоремы Банга–Тарского, но и представляют самостоятельный интерес.

Вот пример применения леммы Банга.

Оценка снизу в задаче M1600

В первой части статьи решена задача M1600 – доказано, что если на плоскости дано конечное число полос, сумма ширин которых равна $\pi + 2$, то параллельными сдвигами этих полос можно покрыть круг единичного радиуса. Оказывается, число $\pi + 2$ нельзя заменить никаким числом, меньшим π . Более того, частным случаем леммы Банга является следующее утверждение:

Если к каждой стороне вписанного в единичный круг правильного $2n$ -угольника построить перпендикулярную полосу, то получим n полос, параллельными сдвигами которых нельзя покрыть никакой $2n$ -угольник, гомотетичный исходному с коэффициентом гомотетии, большим 1.

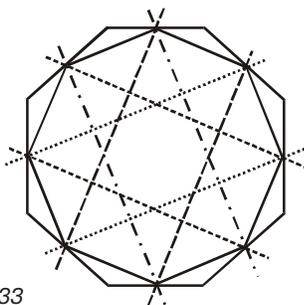


Рис. 33

Полосы, образованные перпендикулярами к сторонам правильного n -угольника, покрывают не только этот многоугольник, но и больший правильный многоугольник (рис.33). Его стороны не параллельны сторонам исходного многоугольника, так что никакого противоречия нет. Мы только видим, что слово «гомотетичный» нельзя заменить словом «подобный».

Важно, что покрыты должны быть не только граничные, но и внутренние точки многоугольника. Например, на рисунке 34 граница шестиугольника покрыта полосами даже

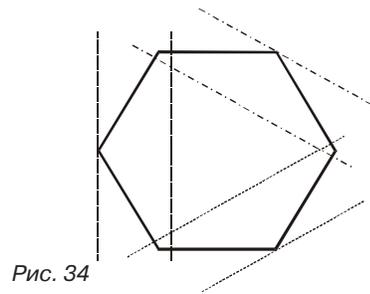


Рис. 34

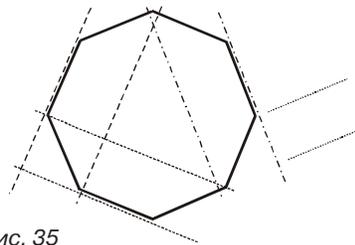


Рис. 35

более узкими, чем сторона шестиугольника. А для восьмиугольника (рис.35) одна полоса оказалась лишней!

Упражнение 25. Перпендикулярные сторонам правильного $2n$ -угольника полосы покрывают не только описанную окружность, но даже изображенный на рисунке 33 описанный вокруг этой окружности $2n$ -угольник. Докажите, что никакой больший правильный $2n$ -угольник сдвигами рассматриваемых полос покрыть невозможно.

Гомотетичные образы

Подготовку к доказательству теоремы Банга–Тарского начнем издалека. Пусть выпуклая фигура F разрезана на выпуклые фигуры. Впишем в них фигуры, гомотетичные F (рис.36).

Гипотеза. При любом разрезании гомотетичные F фигуры можно выбрать настолько большими, чтобы сумма коэффициентов гомотетии была не меньше 1.

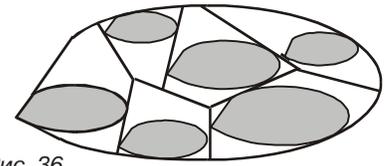


Рис. 36

Мы умеем доказывать следующий частный случай гипотезы:

Если выпуклая фигура F разрезана прямой l на две части, то в эти части можно вписать гомотетичные образы фигуры F так, чтобы сумма соответствующих коэффициентов гомотетии равнялась 1.

Для доказательства проведем опорные прямые m и k , параллельные прямой l (рис. 37). Отметим на пря-

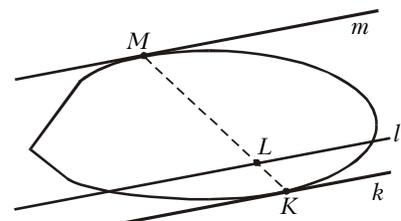


Рис. 37

мых m и k точки M и K «соприкосновения» с фигурой F , т. е. точки, принадлежащие одновременно и соответствующей прямой, и границе фигуры F . (Эти точки не всегда определены однозначно – см. рис. 38.)

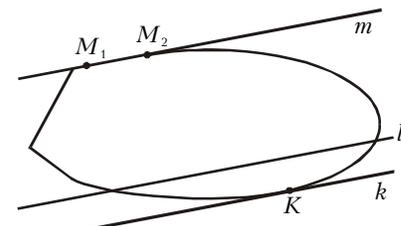


Рис. 38

Обозначим буквой L точку пересечения отрезка KM с прямой l . Образы $H_K^{KL/KM}(F)$ и $H_M^{ML/MK}(F)$ фигуры F при гомотетиях с центрами K и M и коэффициентами KL/KM и ML/MK содержатся в частях, на которые прямая l делит фигуру F (рис.39). Сумма коэффициентов го-

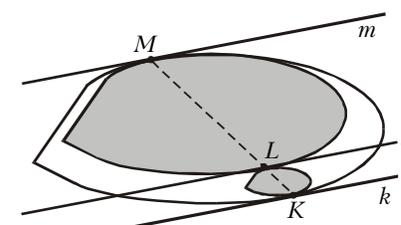


Рис. 39

мотетии

$$\frac{KL}{KM} + \frac{ML}{MK} = \frac{KL + LM}{KM}$$

равна 1.

Упражнение 26. Дан прямоугольник, не являющийся квадратом. Разместите внутри него два непересекающихся подобных ему с коэффициентами k_1 и k_2 прямоугольника так, чтобы сумма $k_1 + k_2$ была больше 1.

Решение. Выберем точку на диагонали прямоугольника вблизи его вершины¹ и проведем через нее прямые параллельно сторонам (рис.40). Прямоугольник окажется разбит на четыре части, две из

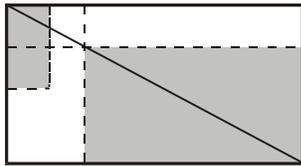


Рис. 40

которых содержат отрезки его диагонали и являются прямоугольниками, гомотетичными исходному. Сумма коэффициентов гомотетии равна 1.

Отразив меньший из прямоугольников относительно биссектрисы его угла, являющегося заодно и углом исходного прямоугольника, видим, что образовался зазор, который позволяет увеличить прямоугольничек.

Упражнение 27. Ограниченная фигура F разрезана прямой на две части. Докажите, что нельзя вписать в них гомотетичные образы фигуры F так, чтобы сумма коэффициентов гомотетии была больше 1.

Упражнение 28. Между параллельными опорными прямыми фигуры F провели на равных расстояниях одну от другой n параллельных прямых (рис.41). Дока-

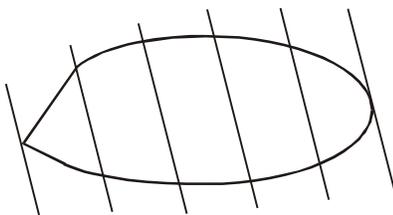


Рис. 41

жите, что ни в одну из $n + 1$ частей, на которые оказалась разбита фигура F , нельзя поместить ее гомотетичный образ с коэффициентом гомотетии, превосходящим $1/(n + 1)$.

Замечание. Американский математик Дэвенпорт выдвинул гипотезу: как бы ни были расположены n прямых, хотя бы в одной из частей, на которые они делят

¹ Это нужно, чтобы при описываемой далее симметрии прямоугольничек не вылез из границ исходного прямоугольника.

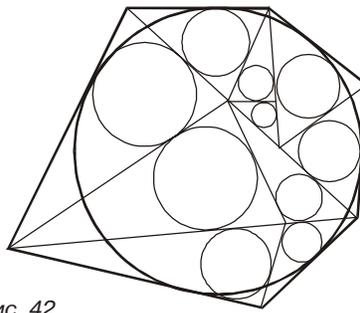


Рис. 42

выпуклую ограниченную фигуру F , можно разместить гомотетичный образ фигуры F при гомотетии с коэффициентом $1/(n + 1)$.

Упражнение 29. Если описанный около окружности радиусом r многоугольник разбит на треугольники, то сумма $r_1 + \dots + r_n$ радиусов их вписанных окружностей не меньше r (рис.42).

Свойство наибольшей хорды

Прежде чем применять гомотетии для доказательства теоремы Банга–Тарского, рассмотрим всевозможные хорды выпуклой фигуры F , параллельные некоторому фиксированному направлению. Опорные прямые, проведенные в концах хорды AB рисунка 43, не параллельны одна другой. Не параллельны и опорные прямые,

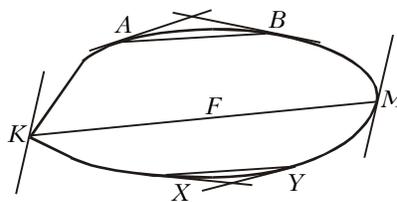


Рис. 43

проведенные в концах хорды XY , но пересекаются они «с другой стороны». Интуиция подсказывает, что для какой-то промежуточной между AB и XY хорды опорные прямые окажутся параллельными.

Лемма. *Через концы K и M самой длинной² из семейства параллельных хорд выпуклой фигуры F можно провести параллельные опорные прямые.*

Доказательство. Проведем всевозможные лучи с началом K , пересекающие фигуру F (рис.44). Образуется угол K_1KK_2 . Аналогично строим угол M_1MM_2 . Проведем лучи ML_1 и ML_2 параллельно лучам KK_1 и KK_2

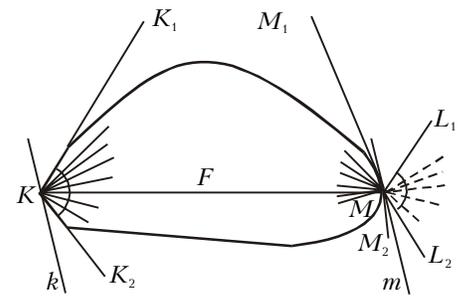


Рис. 44

соответственно.

Отделим углы M_1MM_2 и L_1ML_2 один от другого прямой m – и останется лишь провести через точку K прямую k , параллельную m . Параллельные опорные прямые построены!

Упражнение 30. Мы использовали не доказанный (хотя и очевидный) факт, что углы M_1MM_2 и L_1ML_2 можно отделить один от другого прямой, т. е. что $\angle K_1KM + \angle KMM_1 \leq 180^\circ$ и $\angle K_2KM + \angle KMM_2 \leq 180^\circ$. Докажите эти неравенства.

Упражнение 31. Провели две опорные прямые выпуклой замкнутой фигуры, расстояние между которыми равно ширине фигуры. Докажите, что фигура имеет хорду с концами на этих прямых, которая перпендикулярна этим прямым.

Указание. Проведите хорды, перпендикулярные опорным прямым (рис. 45). Выберите из них самую длинную. Если ее

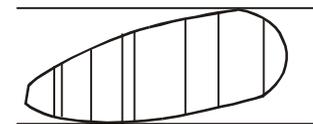


Рис. 45

длина меньше, чем расстояние между опорными прямыми, то проведите через концы этой хорды параллельные опорные прямые.

Ширина пересечения фигуры со своим сдвигом

Следующая лемма потребует нам для доказательства теоремы Банга–Тарского.

Лемма. *Пусть F – выпуклая фигура, ω – ее ширина, F' – фигура, полученная из F параллельным переносом на вектор \vec{v} (рис.46). Тогда*

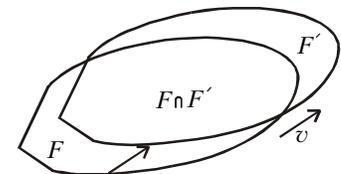


Рис. 46

² Существование такой хорды мы не доказываем, поскольку соответствующие теоремы математического анализа не имеют прямого отношения к теме статьи.

ширина пересечения $F \cap F'$ не меньше чем $w - |\vec{v}|$.

В частности, если $w > |\vec{v}|$, то пересечение $F \cap F'$ не пусто.

Доказательство. Рассмотрим хорды фигуры F , параллельные вектору \vec{v} . Наибольшая из них KM обладает, как сказано в предыдущем разделе, тем свойством, что через ее концы можно провести параллельные опорные прямые k и m (рис.47).

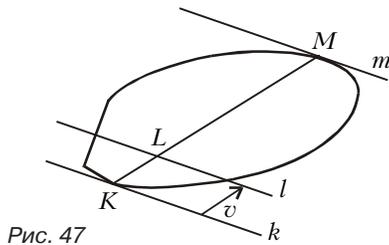


Рис. 47

Обозначим буквой L точку пересечения с отрезком KM прямой l , которая получается из опорной прямой k параллельным переносом на вектор \vec{v} . Рассмотрим фигуру $\tilde{F} = H_M^{LM/KM}(F)$. Она содержится в F (рис.48). Та же самая фигура \tilde{F}

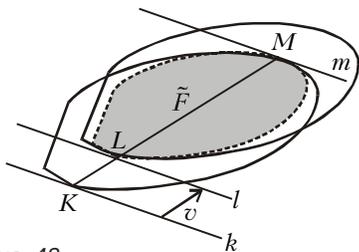


Рис. 48

есть образ фигуры F' при гомететии с центром L и тем же коэффициентом LM/KM . (Это видно из

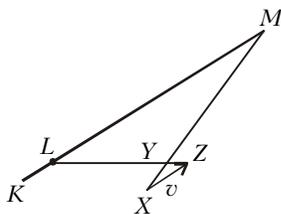


Рис. 49

подобия треугольников MYL и XYZ на рисунке 49, где Z — образ точки X при сдвиге на \vec{v} .) Следовательно, \tilde{F} содержится не только в F , но и в F' , а значит — в пересечении $F \cap F'$. Ширина фигуры \tilde{F} — гомететичного образа фигуры F — равна ширине w фигуры F , умноженной на коэффициент гомететии $(KM - |\vec{v}|)/KM$.

Упражнение 32. Проверив неравенство $w - w \frac{|\vec{v}|}{KM} \geq w - |\vec{v}|$, завершите доказательство леммы.

Остовы

При доказательстве леммы Банга мы будем следить не за всеми точками многоугольника, а только за верши-

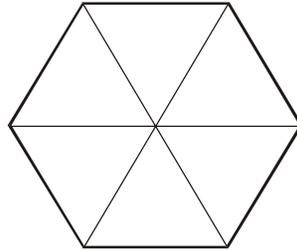


Рис. 50

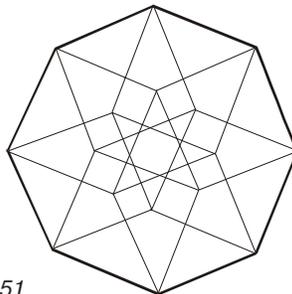


Рис. 51

нами его остова. На рисунках 50, 51 и 52 изображены остовы правильных шести-, восьми- и десятиугольника.

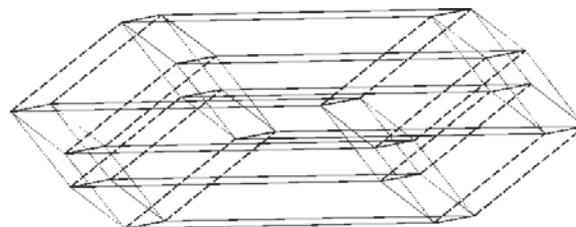


Рис. 52

Центрально-симметричные многоугольники

Точное определение остова мы дадим чуть позже, а пока взгляните на рисунок 53. На нем изображены центрально-симметричные многоугольники — четырехугольник (параллело-

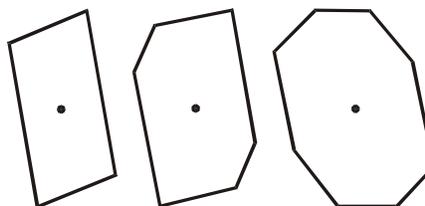


Рис. 53

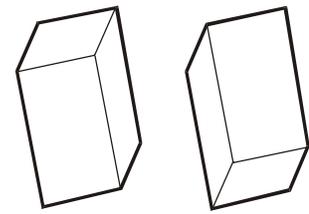


Рис. 54

грамм), шестиугольник и восьмиугольник. Любой многоугольник, имеющий центр симметрии, имеет четное число вершин, а его противоположные стороны равны и параллельны.

На рисунке 54 центрально-симметричный шестиугольник разрезан на

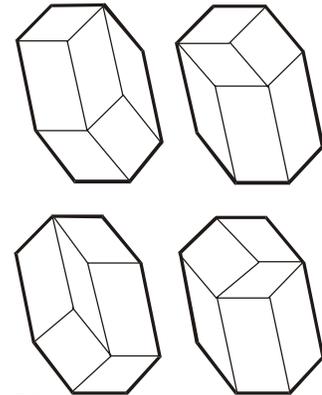


Рис. 55

параллелограммы, стороны которых равны и параллельны сторонам шестиугольника. На рисунке 55 на параллелограммы разными способами разрезан восьмиугольник.

Изобразим на одном рисунке все разбиения выпуклого центрально-симметричного многоугольника F на параллелограммы со сторонами, параллельными и равными сторонам многоугольника (рис.56, 57). Возникнет система точек и отрезков, которую будем называть *остовом* многоугольника F .

Хотя нам это и не потребуется для

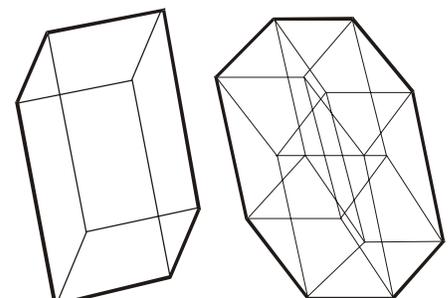


Рис. 56

Рис. 57

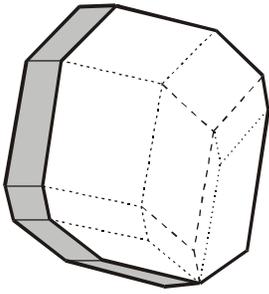


Рис. 58

доказательства теоремы Банга—Тарского, отметим, что любой центрально-симметричный выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы со сторонами, равными и параллельными сторонам многоугольника. Идея доказательства показана на рисунке 58.

Определение остова

Рассмотрим систему векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ и точку O (рис.59). Понять,

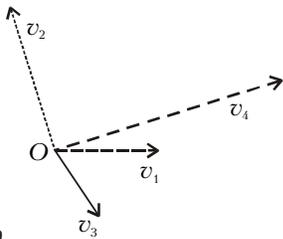


Рис. 59

что такое остов, поможет следующее упражнение.

Упражнение 33. От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул один час со скоростью \vec{v}_1 , второй час — со скоростью \vec{v}_2 , ..., n -й час — со скоростью \vec{v}_n . Пожар распространялся от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем загоревшиеся участки продолжали гореть). Какой участок выгорел за n часов?

Точное определение остова таково. Сдвинем точку O на вектор \vec{v}_1 . Соединив полученную точку с исходной, получим отрезок S_1 (рис. 60). Сдвинем S_1 на вектор \vec{v}_2 . Получим параллелограмм S_2 . Из S_2 при помо-

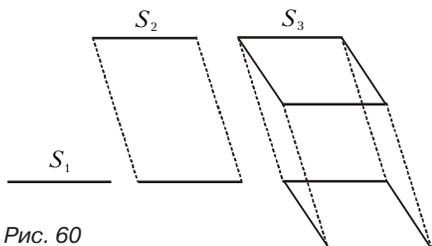


Рис. 60

щи вектора \vec{v}_3 получаем систему отрезков S_3 . Вообще, чтобы получить S_{k+1} , мы к S_k добавляем образ S_k при параллельном переносе на вектор \vec{v}_{k+1} . Кроме того, добавляем отрезки, соединяющие вершины остова S_k с вершинами, в которые они переходят при сдвиге на \vec{v}_{k+1} . Таким образом по системе векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ мы строим остов $S_n = S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Произвольная вершина этого остова получается из начальной точки O сдвигом на вектор $a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$, где коэффициенты a_i суть 0 или 1. Например, точка P рисунка 61 получена из O сдвигом на \vec{v}_2 , точка Q получена сдвигом на $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$, а $\vec{OR} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4$.

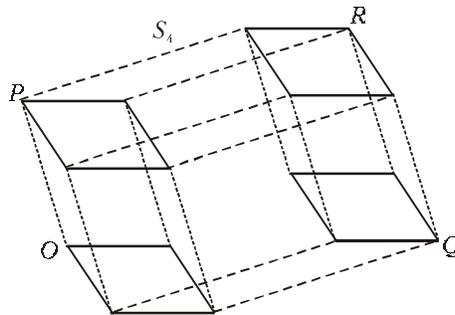


Рис. 61

Так как число вершин системы S_{k+1} , вообще говоря, вдвое больше числа вершин системы S_k , то число вершин остова S_n равно 2^n . Мы употребили выражение «вообще говоря» из-за того, что какие-то вершины могли совпасть, как это произошло, например, на рисунке 50, где в центре правильного шестиугольника совпали две вершины его остова.

Остов назовем невырожденным, если все его вершины различны. Из каждой вершины невырожденного остова S_n исходит ровно n ребер. (Некоторые ребра могут, как это показано на рисунке 57, лежать на одной прямой. На существо дела это не влияет. Надо только не дать себя запутать случайными совпадениями.) При доказательстве теоремы Банга—Тарского будем рассматривать только невырожденные остовы. Мы имеем право это делать, поскольку длины векторов \vec{v}_i , как вы помните, можно чуточку варьировать.

Упражнение 34. Докажите, что набор векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ дает невырожденный остов в том и только том случае, когда никакой вектор этого набора не представим в виде $\vec{v}_k = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_{k-1} \vec{v}_{k-1}$, где коэффициенты a_i суть 0, 1 или -1.

Итак, для того чтобы построить остов выпуклого центрально-симметричного $2n$ -угольника $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1} \dots A_{2n}$, достаточно взять $\vec{v}_1 = A_1 A_2, \vec{v}_2 = A_2 A_3, \dots, \vec{v}_n = A_n A_{n+1}$, а в качестве начальной точки O — точку A_1 .

Почему остов можно разместить в фигуре?

Сдвинем фигуру F на вектор \vec{v}_1 и пересечение полученной фигуры F' с F обозначим через F_1 (рис.62). Как пересечение выпуклых фигур, фигура F_1 выпуклая. Ее ширина не меньше чем $d - |\vec{v}_1|$.

Сдвинем F_1 на вектор \vec{v}_2 и обозначим через F_2 пересечение полученной фигуры с F_1 . Ширина фигуры F_2 не меньше чем $d - |\vec{v}_1| - |\vec{v}_2|$.

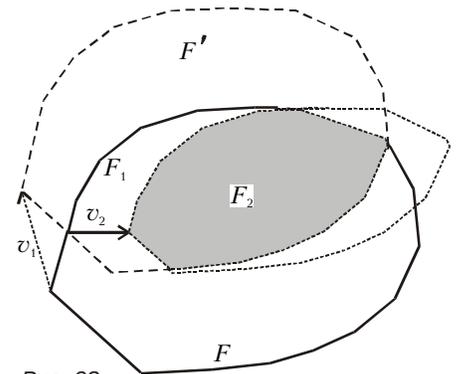


Рис. 62

Будем сдвигать и пересекать фигуры до того момента, когда из F_{n-1} получим F_n (на рисунке 63 $n = 4$). Каждое из множеств F_i , где $i = 1, \dots$

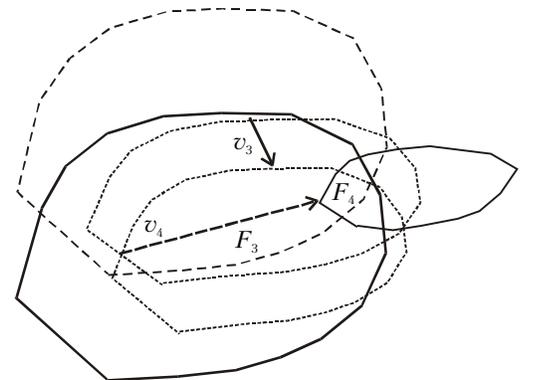


Рис. 63

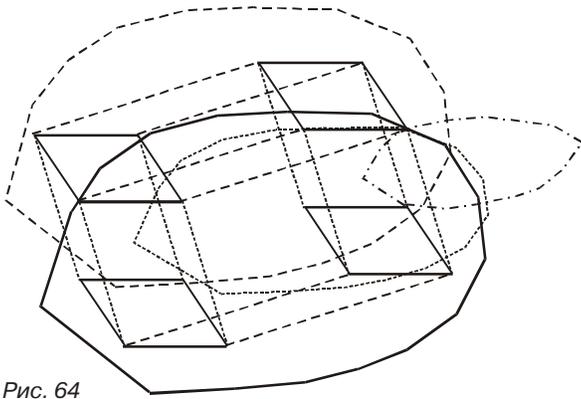


Рис. 64

..., n , содержится в F_{i-1} . (Чтобы это утверждение имело смысл при $i = 1$, пусть $F_0 = F$.) Более того, вместе с фигурой F_i в F_{i-1} содержится ее сдвиг на вектор $-\vec{v}_i$.

Ширина фигуры F_n не меньше чем $d - |\vec{v}_1| - \dots - |\vec{v}_n| > 0$. Поэтому существует точка $O \in F_n$. Если начать построение с нее, то легко понять, что остов $S(-\vec{v}_n)$ будет содержаться в F_{n-1} , остов $S(-\vec{v}_{n-1}, -\vec{v}_n)$ — в F_{n-2} , ..., $S(-\vec{v}_1, \dots, -\vec{v}_n)$ — в F (рис.64).

Доказательство леммы Банга

Возьмем наугад произвольную вершину остова. Укажем способ, двигаясь в соответствии с которым по ребрам остова, мы дойдем до вершины, не лежащей ни в одной из данных полос.

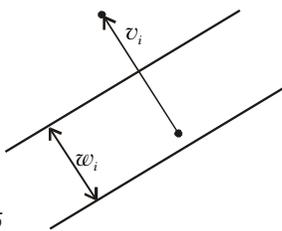


Рис. 65

Если вершина не лежит ни в одной из полос, то двигаться никуда не надо. Если же она содержится в некоторой полосе p_i , рассмотрим выходящее из этой вершины ребро остова, соответствующее вектору \vec{v}_i (рис.65).

Длина этого ребра равна $|\vec{v}_i|$. Она больше, чем ширина w_i полосы p_i , поэтому второй конец ребра расположен вне полосы p_i . Туда и надо идти. (Если вершина принадлежала сразу нескольким полосам, то можно идти по любому из соответствующих ре-

бер.) Применяя к новой вершине остова то же правило, мы перейдем в следующую вершину, и т.д.

К сожалению, чтобы доказать, что мы убежим из всех полосок, недостаточно сказать, что можно выбежать из любой полоски. Дело в том, что, выбежав на некотором шаге из полосы, мы не имеем гарантии, что не вернемся в нее же через несколько шагов. И все-таки процесс убегания завершится (причем менее чем за 2^n шагов).

Чтобы доказать это, рассмотрим произвольное ребро PQ остова S_n (рис.66). Оно соответствует некоторому вектору \vec{v}_i и полосе p_i . Ребру

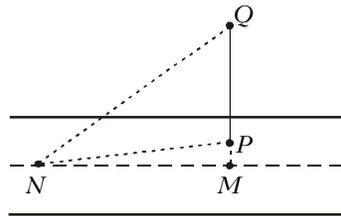


Рис. 66

PQ сопоставим разность квадратов $QM^2 - PM^2$ расстояний от точек Q и P до оси полосы p_i (ось полосы — это прямая, параллельная ее краям и делящая ее на две полосы одинаковой ширины). По теореме Пифагора,

$$\begin{aligned} QN^2 - PN^2 &= \\ &= (QM^2 + MN^2) - (PM^2 + MN^2) = \\ &= QM^2 - PM^2 \end{aligned}$$

для любой точки N оси полосы, так что рассматриваемая величина есть разность расстояний от точек Q и P до любой точки N оси полосы.

Ломаной $A_1A_2 \dots A_n$, состоящей из ребер остова, сопоставим сумму чисел, сопоставленных ее звеньям $A_1A_2, A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$. Отметим, что если ломаная возникла в процессе убегания от полосок, то соответствующее ломаной число положительно (начало всякого ребра A_iA_{i+1} лежит в соответствующей этому ребру полосе, а конец — не лежит).

Лемма. Любому замкнутому (т.е. заканчивающемуся там же, где начался) маршруту по вершинам остова сопоставлено число 0.

Доказательство. Рассмотрим сначала короткий замкнутый маршрут

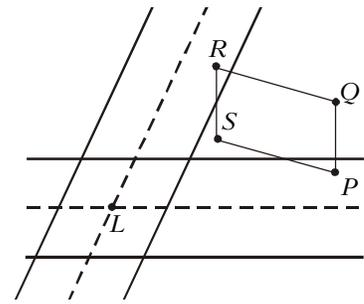


Рис. 67

— параллелограмм $PQRS$ (рис.67). Ребрам PQ, QR, RS и SP сопоставлены числа $QL^2 - PL^2, RL^2 - QL^2, SL^2 - RL^2$ и $PL^2 - SL^2$. Их сумма равна нулю.

Упражнение 35. Разберите самостоятельно изображенный на рисунке 68 случай, когда оси полос параллельны.

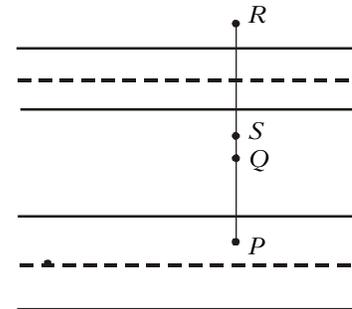


Рис. 68

Если маршрут состоит более чем из четырех ребер, то, выбрав любую его точку в качестве начальной, запишем последовательность ребер, из которой маршрут состоит. То, что по любому параллелограмму сумма сопоставленных его сторонам величин равна 0, означает, что можно, не меняя сопоставленной всему маршруту величины, менять маршрут, переставляя соседние векторы. Рассмотрим любой входящий в маршрут вектор и противоположный ему, перестановками будем приближать их друг к другу. Когда они окажутся рядом, эти два вектора исключим из маршрута. Лемма доказана. (Тем, кто знаком с понятием n -мерного куба, проще всего понять это доказательство, если вообразить, что «стягивается в точку» замкнутый путь, состоящий из ребер n -мерного куба.)

Из этой леммы как раз следует, что в процессе убегания от полосок вершины не повторяются. (Последнее утверждение могло бы оказаться неверным, если бы мы рассматривали не только невырожденные остовы. Но утверждение все же было бы верно и для вырожденных остовов,

если бы мы следили не только за положением вершины остова на плоскости, но и за набором коэффициентов a_1, \dots, a_n , задающих вершину по формуле $\vec{OA} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$. Поскольку число вершин остова конечно, лемма Банга доказана.

Есть и другой способ доказательства леммы Банга. Скалярное произведение $\vec{v}_i \cdot \vec{OM}$ не меняется, когда точка M перемещается параллельно оси полосы p_i . Выбрав на оси полосы любую точку M_i , положим $b_i = \vec{v}_i \cdot \vec{OM}_i$. Прямые, ограничивающие полосу p_i , можно задать уравнениями

$$\vec{v}_i \cdot \vec{OM} = b_i = \pm \frac{1}{2} |\vec{v}_i| w_i.$$

Рассмотрим для каждого вектора $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$, где коэффициенты a_i суть 0 или 1, величину

$$f(a_1, \dots, a_n) = \vec{v}^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \dots - 2a_nb_n.$$

Выберем набор (a_1, \dots, a_n) , для которого величина $f(a_1, \dots, a_n)$ наибольшая. Тогда при любом $i = 1, \dots, n$ должно выполняться неравенство

$$f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \geq f(a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, a_n),$$

которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \dots - 2a_nb_n &\geq \\ &\geq \left(\vec{v} + (1 - 2a_i)\vec{v}_i \right)^2 - \\ &- 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \dots - 2a_nb_n - 2(1 - 2a_i)b_i. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и упростив, получаем неравенство

$$\vec{v}_i^2 \leq 2(2a_i - 1)(\vec{v}_i \cdot \vec{v} - b_i),$$

из которого, поскольку $|2a_i - 1| = 1$ и $\vec{v}_i^2 > |\vec{v}_i| w_i$, следует, что

$$\frac{1}{2} |\vec{v}_i| w_i < |\vec{v}_i \cdot \vec{v} - b_i|,$$

т.е. соответствующая набору (a_1, \dots, a_n) вершина остова не лежит в i -й полосе. Что и требовалось.

Приложение

Определения

Фигура называется выпуклой, если вместе с любыми двумя своими точками A и B она содержит все точки отрезка AB .

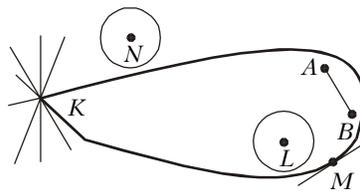


Рис. 69

Точка A плоскости называется граничной точкой фигуры, если любой круг с центром A содержит как точки фигуры, так и точки, ей не принадлежащие. Множество граничных точек фигуры называется ее границей.

Точка называется внутренней точкой фигуры, если некоторый круг с центром в этой точке целиком содержится в фигуре. На рисунке 69 точки K, M – граничные точки фигуры F , точки A, B, L – внутренние. Точка N не является ни внутренней, ни граничной точкой, поскольку существует круг с центром N , в котором нет ни одной точки фигуры F . В точке M к фигуре F можно провести единственную опорную прямую, а в точке K – бесконечно много.

Теорема. *Через любую граничную точку выпуклой фигуры проходит хотя бы одна опорная прямая.*

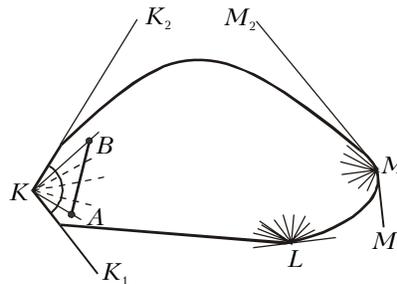


Рис. 70

Доказательство. Пусть K – граничная точка выпуклой фигуры F . Проведем всевозможные лучи с началом K через точки фигуры F (рис.70). По определению выпуклой фигуры, вместе с любыми проведенными лучами KA и KB , где $A, B \in F$, окажутся проведены (через точки отрезка AB) все лучи угла AKB . Значит, образуется угол K_1KK_2 . Он может оказаться развернутым (в роли точки K могла выступить точка L). Ограничивающие этот угол лучи могут войти в построенное множество лучей (как, например, луч KK_1), а могут и не войти в него (как MM_2). Но в любом случае через точку K можно провести опорную прямую к фигуре F .

Разделяющая прямая

Теорема. *Если F и G – выпуклые замкнутые ограниченные непересекающиеся фигуры, то существует прямая, относительно которой F и G лежат по раз-*

ные стороны (в разных полуплоскостях).

Доказательство. Рассмотрим кратчайший отрезок AB , где $A \in F, B \in G$. (Длина этого отрезка называется расстоянием между фигурами F и G .) Перпендикуляр к отрезку AB , как легко доказать методом «от противного», разделяет фигуры F и G .

Упражнение 36. Докажите, что для любых двух непересекающихся выпуклых многоугольников в качестве разделяющей прямой годится одна из их сторон (точнее, прямая, на которой она лежит).

Упражнение 37. Докажите, что если F и G – выпуклые непересекающиеся фигуры, то существует прямая, относительно которой F и G лежат по разные стороны.

Почему ширина существует?

Мы считали очевидным, что ограниченная фигура F имеет ширину по любому направлению. Чтобы прояснить ситуацию, спроецируем фигуру вдоль данного направления на перпендикулярную прямую. Мы приходим к известной теореме о существовании точной верхней (нижней) грани ограниченного сверху (соответственно, снизу) множества. Эта теорема – один из краеугольных камней учения о вещественных числах. Ее доказательство можно найти в учебниках математического анализа.

Если каждой прямой l , проходящей через начало координат, сопоставить ширину $w(l)$ ограниченной фигуры F по направлению l , мы получим непрерывную функцию (докажите!). По теореме Вейерштрасса, доказательство которой тоже можно найти в учебниках, определенная на ограниченном замкнутом множестве непрерывная функция принимает и наибольшее, и наименьшее значения. Значит, среди всех ширин $w(l)$ существуют наименьшая и наибольшая.