казанному, меньше $2\cdot10^6$. Тогда $a_n < n-1+2\cdot10^6 < n+$ $+2\cdot10^6$. С другой стороны, также по доказанному, если $i <$ $<n-2\cdot10^6$, то $a_i < a_n$, отсюда сразу следует, что $n-$ $-2\cdot10^6 < a_n < n+2\cdot10^6$, т.е. $|a_n-n| < 2\cdot10^6$.

## Заключительный этап

### 9 класс

**1.** Абсциссы $x_1$ и $x_2$ точек пересечения параболы и прямой $y=x$ удовлетворяют уравнению $x^2+(p-1)x+q=0$. По теореме Виета $x_1+x_2=1-p$. Аналогично получаем, что абсциссы $x_3$ и $x_4$ точек пересечения параболы и прямой $y=2x$ связаны соотношением $x_3+x_4=2-p$.
Если $x_1<x_2$, а $x_3<x_4$, то проекция левой дуги равна $x_1-$ $-x_3$, а правой $x_4-x_2$. Разность их равна

$$(x_4-x_2)-(x_1-x_3)=(x_3+x_4)-(x_1+x_2)=$$
$$=(2-p)-(1-p)=1.$$

**2.** Отметим углы параллелограммов, являющиеся частью углов многоугольника. Пусть в многоугольнике $n$ сторон. Тогда сумма отмеченных углов равна $180°\cdot(n-2)$. К каждой стороне многоугольника примыкают стороной по два отмеченных угла, их сумма, очевидно, не менее 180°. Просуммировав такие пары по всем сторонам, получим не менее $180°\cdot n$, т.е. по крайней мере на 360° больше, чем при подсчете другим способом. Избыток возникает за счет того, что некоторые углы посчитаны дважды, а именно те, которые примыкают сразу к двум сторонам. Поскольку каждый такой угол меньше 180°, то таких углов не менее трех. Но вершины таких углов как раз и являются хорошими вершинами многоугольника.

**7.** *Ответ*: $\left[\frac{3N}{4}\right]$ звена (здесь $[x]$ – целая часть числа $x$).
Заметим, что в каждой паре звеньев, бывших соседями, но переставших ими быть, по крайней мере одно звено должно быть раскрыто. Это же верно для пары несоседних звеньев, которые должны стать соседями.
Если разбить звенья на группы так, чтобы любые два звена в группе являлись или впоследствии стали соседними (но не то и другое вместе), то из каждой такой группы может остаться нераскрытым не более одного звена. Такой группой, например, являются 4 звена, которые в старой цепочке следовали в порядке 1-2-3-4 а в новой должны быть в порядке 2-4-1-3.
Другие примеры: в старой 1-2-3, в новой 1-3 (а 2 с ними не связано), или в старой 1-2, а в новой они не связаны.
Разбив мысленно цепочку на четверки, с возможным остатком в 1, 2 или 3 звена, и потребовав такой порядок, при котором четверки и остаток изменяются указанным образом, застежка... казчица обеспечит раскрытие не менее $\left[\frac{3N}{4}\right]$ звеньев (лишнее звено из остатка прицепляется с другого конца).
С другой стороны, раскрыв в исходной цепочке каждое второе звено, ювелир разобьет вторую цепочку на части, где в сумме не более половины всех звеньев. В каждой части надо раскрыть не более половины звеньев, поэтому не менее четверти звеньев можно оставить нераскрытыми.

**8.** Одновременно с операциями на доске будем вести запись в тетради. Но вместо каждого числа $x$, появляющегося на доске, будем писать в тетради число $\frac{ab}{x}$ ($a$ и $b$ – исходные числа). Когда на доске пара чисел $(x, y)$, где $x>y$, заменяется на пару $\left(x,\frac{xy}{x-y}\right)$, в тетради происходит замена

$$\left(\frac{ab}{x},\frac{ab}{y}\right)\to\left(\frac{ab}{x},\frac{ab(x-y)}{xy}\right)=\left(\frac{ab}{x},\frac{ab}{y}-\frac{ab}{x}\right),$$

т.е., как в алгоритме Евклида, большее число заменяется на разность. Следовательно, на каком-то шаге мы запишем в тетрадь пару чисел, равных НОД$(a, b)$. В это же время оба числа на доске станут равными $\frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}$, т.е. НОК$(a,b)$.

### 10 класс

**1.** Из условия следует, что $a>0$. Если $y=p$ и $y=q$ – уравнения заданных прямых, то абсциссы точек $A$, $D$ и $E$ – корни $x_1<x_2<x_3$ уравнения $ax^3+bx^2+cx+d-p=0$, а точек $B$, $C$ и $F$ – корни $X_1<X_2<X_3$ уравнения $aX^3+bX^2+$ $+cX+d-q=0$. По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=X_1+$ $+X_2+X_3$. Отсюда $x_2-X_2=(X_1-x_1)+(X_3-x_3)$, что и требовалось доказать.

**3.** Сначала докажем, что стороны треугольника $K_aK_bK_c$ параллельны соответствующим сторонам треугольника $ABC$.
Пусть $AC>AB$. Имеем $\angle POL=\angle K_aOL$ и $\angle POB=\angle ROB$ (рис.10), поэтому $\angle K_aOR=2\angle LOB$. Угол $LOB$ внешний в треугольнике $AOB$, значит $\angle K_aOR=2(\alpha/2+\beta/2)=\alpha+\beta$.
Аналогичными рассуждениями получаем, что $\angle K_bOR=\alpha+$ $+\beta$. Следовательно точки $K_a$ и $K_b$ симметричны относительно прямой $OR$, поэтому прямые $K_aK_b$ и $AB$ параллельны. Случай $AC<AB$ разбирается аналогично.

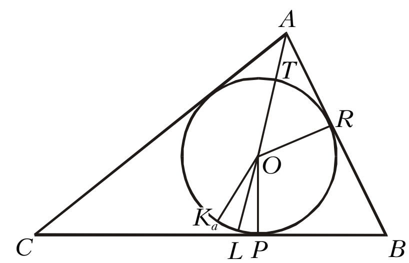


*Рис. 10*

Итак, соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и $K_aK_bK_c$ параллельны ($M_a$, $M_b$, $M_c$ – середины сторон треугольника), поэтому эти треугольники гомотетичны. Центр этой гомотетии является общей точкой прямых $M_aK_a$, $M_bK_b$ и $M_cK_c$.
Пусть прямая $M_aK_a$ пересекает вписанную в треугольник $ABC$ окружность в точке $T$. Будем считать, что $AC>AB$.
Докажем, что описанная вокруг треугольника $TK_aL$ окружность проходит через основание $H$ высоты треугольника $ABC$. Для этого достаточно проверить равенство

$$M_aL\cdot M_aH=M_aP^2$$

(рис.11).
Это можно сделать, выразив длины отрезков $M_aP$, $M_aL$ и $M_aH$ через стороны треугольника $ABC$.

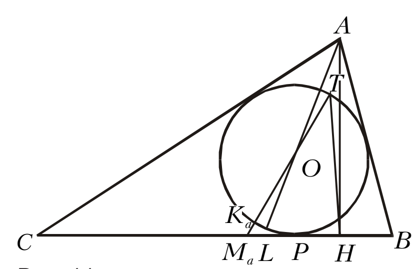


*Рис. 11*

Мы докажем его, пользуясь известными свойствами точки $P'$ касания со стороной $BC$ соответствующей вневписанной окружности треугольника: точка $P'$ симметрична $P$ относительно $M_a$ и отрезок $AP'$ пересекает вписанную окружность в точке, диаметрально противоположной точке $P$. Поэтому прямые $AP'$ и $M_aO$ параллельны ($O$ – центр вписанной окружности, см. рис. 12).Пользуясь параллельностью прямых $AH$ и $OP$, равенством $M_aP'=M_aP$ и теоре-

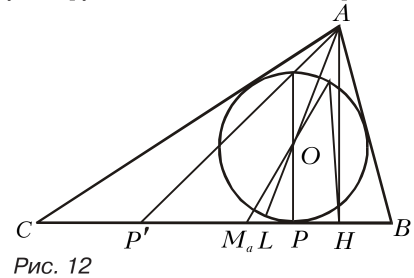


*Рис. 12*