10 класс

1. *Ответ*: $b = 0,\ 0 \le a < 4$. *Указание*. Если x_0 — общий корень, то $f(x_0) = 0$. Отсюда следует, что $b = 0$.

2. *Указание*. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle OBC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а

$\angle KEA = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} C\breve{O} = = \pi - \alpha$.

Отсюда следует, что $KE \| AD$. Аналогично, $KD \| AE$, значит, $ADKE$ – параллелограмм.

3. *Указание*. Пусть A и B – любые две точки данного множества M, расстояние между которыми равно диаметру d этого множества. Тогда из определения диаметра следует, что если $P \in M$, то P лежит внутри или на границе «линзы», образованной пересечением кругов радиуса d с центрами A и B (рис.8). Докажите, что на одной из дуг AKC и BLD нет точек множества M, т.е. что если $K \ne A$, $L \ne B$, то $KL > d$.

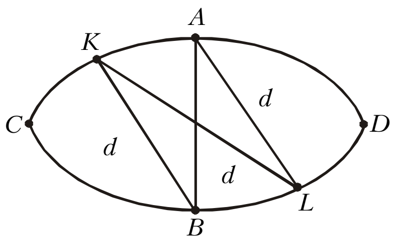

Рис. 8

Пусть, например, это дуга AKC. Удалим точку A, а оставшиеся точки разделим на 2 части прямой AB, присоединив точки самой прямой AB к левой части.

4. *Ответ*: начинающий. *Указание.* Первым ходом начинающий уменьшает на единицу числа в первой и четырех последних ячейках. В дальнейшем в ответ на каждый ход второго он уменьшает на единицу числа в тех же ячейках, что и второй.

5. *Ответ*: $x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 12n}}{6}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Указание.* Заметим, что $0 \le x < 1$. Равенство $\{a + b\} = a$ выполняется только когда b – целое число. Поэтому $3x^2 + 3x$ – целое, т.е. $3x^2 + 3x = n$, где $0 \le n < 6$.

6. *Ответ*: нет. *Указание*. Докажите, что хотя бы один угол пятиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$ большие 180°.

7. Пусть мы убрали минимальное количество перегородок. Рассмотрим кубик, путь из которого до границы самый длинный. Одна из перегородок убрана. Вернем ее на место. Тогда из всех кубиков, кроме этого, пройти на границу все еще можно (поскольку путь из них был не длиннее, через этот кубик он не проходил). Из этого кубика на границу пройти больше нельзя, так как набор был минимальным.
С оставшимися кубиками будем проделывать ту же операцию, пока не отрежем от границы все кубики, не являющиеся пограничными. Их $(n-2)^3$, значит операцию мы проводили $(n-2)^3$ раз, и перегородок было не менее $(n-2)^3$. Этого количества удаленных перегородок достаточно: из каждого непограничного кубика нужно убрать его нижнюю грань.

8. *Ответ*: 11 рублей. *Указание.* Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ для $i \ge 3$. Тогда $a_{10} = 144$.
Алгоритм отгадывания задуманного числа: на каждом шаге содержащее загаданное число множество M, состоящее из a_i чисел, нужно разбивать на множества M_1 из a_{i-2} чисел и M_2 из a_{i-1} чисел и задавать вопрос о принадлежности числа множеству M_1.

11 класс

1. *Ответ*: $36 \cdot 35 = 1260$.
Занумеруем карты сверху вниз по порядку. В верхней колоде номера от 1 до 36, в нижней – от 37 до 72. Обозначим K_i ($i = 1, 2, \ldots, 36$) номер карты нижней колоды такой же, как i-я верхняя. Между i и K_i лежит $K_i - i - 1$ карта, поэтому искомая сумма $S = (K_1 - 1 - 1) + (K_2 - 2 - 1) + \ldots + (K_{36} - 36 - 1)$. Переставим слагаемые $K_1, K_2, \ldots, K_{36}$ по возрастанию – сумма не изменится. Получим $S = (37 - 1 - 1) + (38 - 2 - 1) + \ldots + (72 - 36 - 1) = 36 \cdot 35 = 1260$.

2. *Указание*. Докажите, что касательная к окружности S в точке C параллельна DE

4. *Ответ*: нельзя. *Указание.* Докажите, что в исходной таблице найдется подтаблица 2×2, в которой в трех клетках стоят нули, а в одной — единица. После этого проследите за «судьбой» этой таблицы 2×2. Пусть через несколько ходов в ней стоят числа a и b, образующие верхнюю ее строку, а числа c и d — нижнюю. Докажите затем, что остаток от деления на 3 числа $D = (a + d) - (b + c)$ не меняется в результате применения разрешенных операций во всей таблице. Поскольку вначале этот остаток равен 1 или −1, числа a, b, c, d не могут быть сделаны равными.

5. *Ответ*: нет. *Указание*. Докажите, что из чисел, делящихся на 7, в результате данной операции получаются числа, делящиеся на 7.

6. Сосчитаем стороны всех клеток, составляющих многоугольник, следующим образом: из количества сторон черных клеток вычтем количество сторон белых клеток. Эта величина равна $4(a - b)$, так как у каждой клетки четыре стороны, в то же время каждый отрезок, лежащий внутри многоугольника, был посчитан один раз со знаком «+» и один раз – со знаком «–». Таким образом, полученная величина равна сумме отрезков периметра с соответствующими знаками: «+» для черных и «–» для белых, откуда и получаем требуемое равенство.

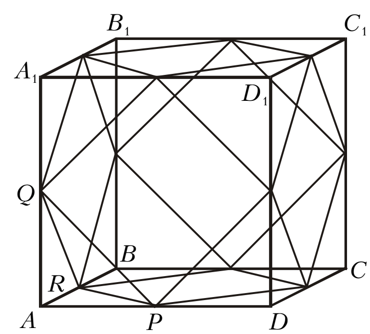

Рис. 9

7. *Ответ*: $5/6$. *Указание*. Докажите, что фигура Φ состоит из середин отрезков, концы которых лежат на тетраэдрах ACB_1D_1 и C_1A_1DB, «вписанных» в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 (рис.9). Докажите, что $\Phi = U$, и найдите объем многогранника U, вершины которого — середины ребер куба.

8. Из неравенства $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} > \frac{1}{1998}$ следует, что все члены последовательности попарно различны. Докажем, что для каждого числа n количество индексов $i > n$, для которых $a_i < a_n$, меньше 1998^2. Пусть $i > n$ и $a_i < n$. Интервал $[1, a_n]$ содержит лишь конечное число членов последовательности, значит, все a_k с достаточно большими k будут больше a_n. При возрастании индекса от i до бесконечности найдется такое j, что $a_j < a_n < a_{j+1}$. Расстояние между a_j и a_{j+1} ввиду неравенства $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998$ меньше 1998, поэтому либо $a_n - a_j < 999$, либо $a_{j+1} - a_n < 999$. В первом из этих случаев по условию $\frac{j - n}{1998} < a_n - a_j < 999$, значит,
$i \le j < n + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$, во втором, аналогично,
$i \le j < n - 1 + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$. Таким образом, число индексов $i > n$, для которых $a_j < a_n$, строго меньше $2 \cdot 10^6$. По условию в последовательности встречаются все натуральные числа, значит, a_n равно числу членов последовательности, лежащих в интервале $[1, a_n]$. Член последовательности, лежащий в $[1, a_n]$, имеет индекс меньший n или больший n, количество первых не более $n - 1$, количество вторых, по до-