дикулярными отрезку AB опорными прямыми не меньше длины отрезка AB. Поэтому диаметр фигуры F не превосходит максимальной из ширин фигуры F. С другой стороны, ширина любой полосы, образованной опорными прямыми фигуры F, не превосходит диаметра фигуры.

8. а) Может. Если F — внутренность круга, то граница фигуры F (окружность) не входит в F.

б) Может. Например, ось абсцисс — опорная прямая к ветви гиперболы $y = 1/x$, $x > 0$ — не имеет с гиперболой общих точек.

Замечание. Можно доказать, что если фигура F замкнута и ограничена, то любая опорная прямая имеет с F хотя бы одну общую точку.

11. Из любого. *Указание*. Разберите два случая: когда средний по величине угол треугольника больше $60°$ и когда это не так.

14. а) $ab/(a+b)$; б) $hc/(h+c)$. в) Поскольку $ab = hc$, достаточно сравнить значения выражений $h + c$ и $a + b$. Воспользуемся формулой $r = (a + b - c)/2$ для радиуса r вписанной окружности прямоугольного треугольника. Поскольку $h > 2r$, имеем $h > 2r = a + b - c$, откуда $h + c > a + b$.

Замечание. Если бы мы выразили ответ пункта б) не через высоту h и гипотенузу c, а через катеты a и b, то возникла бы необходимость сравнить между собой значения выражений $ab/(a+b)$ и $ab\sqrt{a^2+b^2}\big/(a^2+ab+b^2)$.

15. Поставим такую задачу: вписать в треугольник с углом 2φ, где 2φ — величина угла правильного $2n$- угольника, правильный $2n$-угольник наибольшего возможного периметра. Рассмотрим два расположения правильного $2n$-угольника внутри такого треугольника (рис. 2, 3). Обозначим длины сторон треугольника, образующих угол 2φ, через x и y. Тогда третья сторона равна $z = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 2\varphi}$.

Найдем длину стороны правильного $2n$-угольника в обоих случаях.

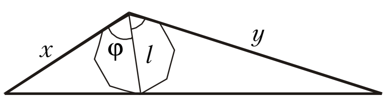

Рис. 2

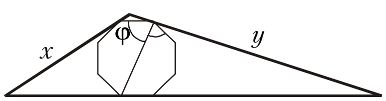

Рис. 3

Случай 1 (см. рис. 2). Диаметр l описанной окружности $2n$-угольника равен биссектрисе треугольника, т.е. $l = \dfrac{2xy\cos\varphi}{x+y}$. Значит, искомая сторона равна

$$a_1 = l\cos\varphi = \frac{2xy\cos^2\varphi}{x+y}.$$

Случай 2 (см. рис. 3).

Из подобия маленького (верхнего) и всего большого треугольников следует равенство $\dfrac{h}{h-a_2\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{z}{a_2}$, где h — высота большого треугольника, a_2 — искомая сторона $2n$-угольника. Значит,

$$a_2 = \frac{hz}{h+z\operatorname{tg}\varphi} = \frac{hz^2}{hz+z^2\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{xyz\sin 2\varphi}{xy\sin 2\varphi + z^2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2xyz\cos^2\varphi}{x^2+y^2+2xy\sin^2\varphi}.$$

Для доказательства неравенства $a_1 > a_2$ осталось показать, что $\dfrac{1}{x+y} > \dfrac{z}{x^2+y^2+2xy\sin^2\varphi}$. В левой части этого неравенства — среднее арифметическое чисел $(x+y)(x^2+2xy\sin^2\varphi)$ и $(x^2+y^2-2xy\cos 2\varphi)/((x+y)(x^2+y^2+2xy\sin^2\varphi))$, а в правой части — среднее геометрическое этих же чисел (проверьте!). Дальнейшее рассуждение аналогично решению задачи 2 в статье.

22. *Первый способ*. Пусть квадрат со стороной a разбит на прямоугольники размером $a_i \times b_i$, где $a_i \le b_i$. Тогда сумма площадей $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ всех прямоугольников разбиения равна a^2. Поскольку $b_i \le a$, имеем $a^2 = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \le \le a_1a + \ldots + a_na$. Осталось разделить обе части последнего неравенства на a.

Второй способ. Каждый прямоугольник разбиения покроем полосой, перпендикулярной самой короткой стороне прямоугольника (если прямоугольник является квадратом, то выберем любую из двух полос). Дальше можно сослаться на теорему Банга-Тарского. А можно просто сказать, что если сумма меньших сторон прямоугольников меньше стороны квадрата, то в квадрате найдутся как не покрытая вертикальными полосами вертикаль, так и не покрытая горизонтальными полосами горизонталь. Точка их пересечения не будет покрыта ни горизонтальными, ни вертикальными полосами.

25. Чтобы покрыть правильный $2n$-угольник, необходимо покрыть весь вписанный в него круг. Среди вписанных в этот круг правильных $2n$-угольников, в свою очередь, содержится многоугольник со сторонами, параллельными сторонам исходного $2n$-угольника.

27. *Указание*. Спроецируйте вписанные фигуры вдоль данной прямой на перпендикулярную прямую. Другими словами, рассмотрите ширины фигур в соответствующем направлении.

29. Воспользуемся формулой $S = Pr/2$, выражающей площадь описанного многоугольника через его периметр P и радиус вписанной окружности r. Если $P_1, \ldots, P_n$ — периметры треугольников разбиения, то

$$\frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2}P_1r_1 + \ldots + \frac{1}{2}P_nr_n,$$

откуда

$$r = \frac{P_1}{P}r_1 + \ldots + \frac{P_n}{P}r_n \le r_1 + \ldots + r_n,$$

поскольку периметры $P_1, \ldots, P_n$ треугольников не превосходят периметра P объемлющего многоугольника.

30. *Указание*. Допустив противное, т.е. предположив, что сумма углов K_1KM и M_1MK больше $180°$, поверните немного эти лучи друг к другу так, чтобы получились два новых луча KK' и MM', которые пересекают внутренность фигуры F, а сумма углов $K'KM$ и $M'MK$ по-прежнему больше $180°$. Проведя в достаточной близости от KM параллельный KM отрезок с концами на этих лучах, получите отрезок, целиком лежащий в F, длина которого больше MN.

32. Ширина полосы, ограниченной прямыми k и m, не превосходит длины KM. Ширина w фигуры F не превосходит ширины любой полосы, в которой содержится фигура. Значит, $w \le KM$.

ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ

1. $l = 3F/2$. **2.** *Указание.* Сделайте соответствующее построение. **3.** $l = F/2$. **4.** Источник сместится в ту же сторону на расстояние $y = x = 2$ см.

5. $l = \dfrac{L(n-1)}{\big((dD-1)n - LD(n-1)\big)(dD-1)} = 40$ см.

6. $\dfrac{1}{d_{2*}} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_{1*}} = 0$, $d_{2*} \to \infty$.

7. $F = F_1F_2/\Delta$, где Δ – расстояние между задним фокусом первой линзы и передним фокусом второй (так называемый оптический интервал); эквивалентная линза находится на расстоянии $a = -lF_2/\Delta$ от второй линзы.

XXIV ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Зональный этап

8 класс

1. *Ответ*: не существуют.

2. *Ответ*: не могут. *Указание*. Предположив противное, докажите, что в треугольнике BAL (рис.4) отрезок AK является медианой и биссектрисой. Следовательно, он является и высотой, т.е. $AK \perp BD$. Аналогично, $AL \perp BD$. Но два различных перпендикуляра из одной точки A на прямую BD опустить нельзя.

3. Назовем характеристикой колоды количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше все-