ложного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

О.Подлипский

7. Дан бильярд в форме правильного 1998-угольника $A_1A_2\ldots A_{1998}$. Из середины стороны A_1A_2 выпустили шар, который, отразившись последовательно от сторон A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{1998}A_1$ (по закону «угол падения равен углу отражения»), вернулся в исходную точку. Докажите, что траектория шара – правильный 1998-угольник.

П.Кожевников

8. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого – квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

Д.Храмцов

10 класс

1. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества корней.

Н.Агаханов

2. В остроугольном треугольнике ABC через центр O описанной окружности и вершины B и C проведена окружность S. Пусть OK – диаметр окружности S, D и E – соответственно точки ее пересечения с прямыми AB и AC. Докажите, что $ADKE$ – параллелограмм.

М.Сонкин

3. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

В.Дольников

4. В первые 1999 ячеек памяти компьютера в указанном порядке записаны числа: 1, 2, 4, ..., 2^{1998}. Два программиста по очереди уменьшают за один ход на единицу числа в пяти различных ячейках. Если в одной из ячеек появляется отрицательное число, то компьютер ломается и сломавший его оплачивает ремонт. Кто из программистов может гарантировать себя от финансовых потерь независимо от ходов партнера и как он должен для этого действовать?

Р.Женодаров

5. Решите уравнение $\left\{(x+1)^3\right\} = x^3$, $\{z\}$ – дробная часть числа z, т.е. $\{z\} = z - [z]$.

А.Шаповалов

6. В пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ проведены биссектрисы l_1, l_2, ..., l_5 углов A_1, A_2, ..., A_5 соответственно. Биссектрисы l_1 и l_2 пересекаются в точке B_1, l_2 и l_3 – в B_2 и т.д., l_5 и l_1 пересекаются в точке B_5. Может ли пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ оказаться выпуклым?

Л.Смирнова, Д.Тарасенко

7. Куб со стороной n разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

Д.Храмцов

8. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» – 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

М.Островский

11 класс

1. Есть две колоды, из 36 карт каждая. Первую перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

А.Шаповалов

2. Окружность S с центром O и окружность S' пересекаются в точках A и B. На дуге окружности S, лежащей внутри S', взята точка C. Точки пересечения AC и BC с S', отличные от A и B, обозначим E и D соответственно. Докажите, что прямые DE и OC перпендикулярны.

М.Сонкин

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. Имеется таблица $n \times n$ ($n > 100$), в которой стоит $n-1$ единица, а в остальных клетках – нули. С ней разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем остальным числам, стоящим в одной строке или в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны?

О.Подлипский

5. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7?

Л.Емельянов

6. Из бесконечной шахматной доски вырезали многоугольник со сторонами, идущими по сторонам клеток. Отрезок периметра многоугольника называется черным, если примыкающая к нему изнутри многоугольника клетка – черная, соответственно белым, если клетка белая. Пусть A — количество черных отрезков на периметре, B – количество белых и пусть многоугольник состоит из a черных и b белых клеток. Докажите, что $A - B = 4(a - b)$.

И.Изместьев

7. Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть Φ – множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры Φ.

А.Белов

8. В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ каждое натуральное число встречается хотя бы один раз и для любых различных n и m выполнено неравенство

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n-m|} < 1998.$$

Докажите, что тогда $|a_n - n| < 2\,000\,000$ для всех натуральных n.

Д.Храмцов

Заключительный этап

9 класс

1. Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \ge 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось Ox. Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.

Жюри

2. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину много-