на 180°, имеем:

$$\angle YMZ = 180^\circ - \angle A,$$

$$\angle YMX = 180^\circ - \angle C.$$

Следовательно,

$$\angle XMZ = 360^\circ - (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle C) = \angle A + \angle C,$$

так что сумма противоположных углов четырехугольника $BXMZ$ равна $\angle B + \angle A + \angle C = 180°$. Значит, вокруг четырехугольника $BXMZ$ и в самом деле можно описать окружность.

Замечание. На рисунке 12 показано расположение окружностей и точек,

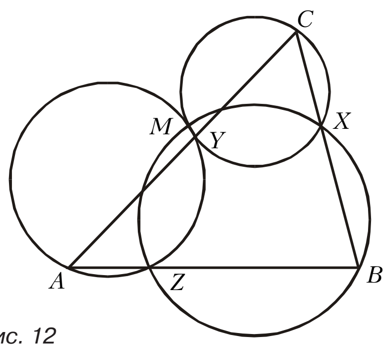

Рис. 12

отличное от разобранного нами. Для действительно полного решения задачи 4 следовало либо разобрать все возможные случаи, либо предложить решение, охватывающее все случаи сразу. Проделайте эту работу!

Мы готовы решать задачу 1. Рассмотрим ΔXYZ, вписанный в ΔABC. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников AZY, CXY и BZX. Повернем лучи MX, MY и MZ на некоторый угол и обозначим точки пересечения полученных лучей со сторонами треугольника ABC через X', Y' и Z' соответственно (рис. 13).

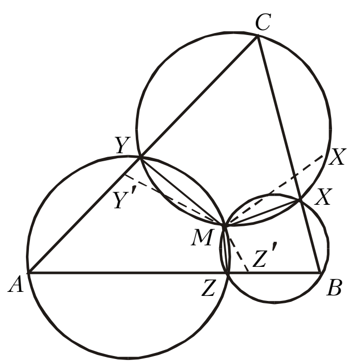

Рис. 13

По свойству вписанного четырехугольника,

$$\angle MMX' = 180^\circ - \angle MYC = \angle MYY'.$$

Аналогично можно доказать, что $\angle MYY' = \angle MZZ'$. Мы приходим к неожиданному выводу: треугольники MXX', MYY' и MZZ' подобны! Значит, $\Delta X'Y'Z'$ подобен ΔXYZ (и даже получается из него поворотной гомотетией с центром M).

Перемещая точку X' по отрезку BC, мы получим целое семейство вписанных в ΔABC треугольников. Размеры треугольника $X'Y'Z'$ тем больше, чем больше расстояние MX'. Поэтому размеры вписанного треугольника можно увеличивать до тех пор, пока одна из его вершин не упрется в вершину треугольника ABC.

Упражнение 2. Завершите решение задачи 1.

Наименьший вписанный треугольник

Решив задачу о наибольшем вписанном в ΔABC треугольнике, подобном данному треугольнику XYZ, спросим себя: как получить не наибольший, а *наименьший* треугольник?

Ответ очевиден: размеры треугольника $X'Y'Z'$ тем меньше, чем меньше длина отрезка MX'. Значит, в случае остроугольных треугольников (мы наложили это требование, чтобы основание опущенного из M перпендикуляра попало на саму сторону, а не на продолжение) наименьшим является треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC. (Такой треугольник называется *педальным* треугольником. О многих интересных свойствах педальных треугольников рассказано в книге Г.Коксетера и С.Грейтцера «Новые встречи с геометрией» — М.: Наука, 1978.)

Частный случай рассмотренной задачи был предложен десятиклассникам на московской олимпиаде 1998 года:

Задача 5. *На пол положили выпиленный из фанеры равносторонний треугольник ABC и вбили три гвоздя, по одному вплотную к каждой стороне треугольника. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении 1:3, считая от вершины A. Второй гвоздь делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B (рис. 14).*

В каком отношении делит сторону CA третий гвоздь, если треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола?

Прежде чем решать задачу, вообразите, что гвозди вбиты в середины сторон равностороннего треугольника ABC, и подумайте, почему треугольник «прибит» этими гвоздями. Подумали? Теперь можно заняться самой задачей.

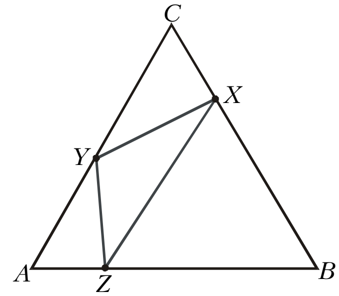

Рис. 14

Решение. *Первый способ*. Если бы ΔXYZ не был наименьшим из семейства вписанных в ΔABC подобных треугольников, то можно было бы уменьшать его размеры при помощи поворотной гомотетии из предыдущего раздела статьи. Значит, треугольник XYZ должен быть педальным треугольником, т.е. перпендикуляры, восставленные в точках X, Y и Z к сторонам треугольника ABC, должны пересекаться в одной точке S (рис.15).

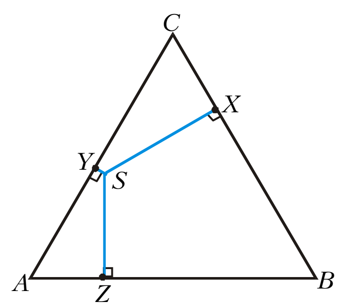

Рис. 15

Теперь легко найти ответ — вычислить, в каком отношении точка Y должна делить сторону AC.

Упражнение 3. Сделайте это, воспользовавшись равенством

$$\left(AZ^2 - ZB^2\right) + \left(BX^2 - XC^2\right) + \left(CY^2 - YA^2\right) = \left(AS^2 - SB^2\right) + \left(BS^2 - SC^2\right) + \left(CS^2 - SA^2\right) = 0.$$

Большинство участников олимпиады, разумеется, ничего не знало о педальных треугольниках. Они рассуждали следующим образом.

Второй способ. Если перпендикуляр, восставленный в точке Y к стороне AC, не проходит через точку пересечения перпендикуляров, восставленных в точках X и Z к сторонам BC и AB, то отметим внутри образованного перпендикулярами треугольника некоторую точку O (рис. 16). Поскольку углы OZB, OYA и OXC острые, гвозди не