Неожиданная поворотная гомотетия

А.СПИРОВ

Я считаю формальную строгость обязательной и думаю, что в конечном счете после большой (и обычно полезной для окончательного понимания) работы она может быть соединена (при изложении важных, т.е. по сути простых результатов) с полной простотой и естественностью. Единственное средство добиться осуществления этого — требовать логической отчетливости даже там, где она пока обременительна.

А.Н.Колмогоров

В СТАТЬЕ «Покрытия полосками» авторы пользовались тем, что все вершины наибольшего квадрата, который можно расположить в данном треугольнике ABC, должны лежать на сторонах этого треугольника. Но так ли уж это очевидно?

Задумавшись над этим вопросом, мы вспомнили такую задачу:

Задача 1. *Впишите в треугольник ABC наибольший возможный треугольник, подобный данному треугольнику XYZ (рис. 1).*

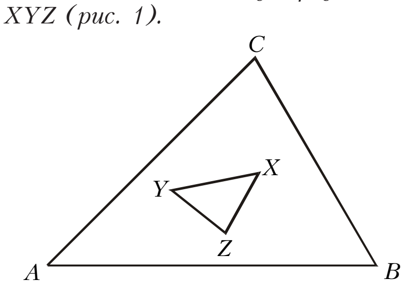

Рис. 1

Ответ в этой задаче вполне бесхитростный: одна из сторон наибольшего вписанного треугольника должна лечь на сторону треугольника ABC.

Намного интереснее решение. Оказывается, существует семейство вписанных в треугольник ABC треугольников, получающихся один из другого поворотной гомотетией. Об этом красивом и удивительном явлении, а также о некоторых свойствах вписанных друг в друга многоугольников рассказано ниже.

Как вписать в треугольник квадрат?

Начнем с классической задачи:

Задача 2. *Впишите в данный треугольник ABC квадрат, две вершины которого лежат на AB, а две другие — на двух других сторонах (рис. 2).*

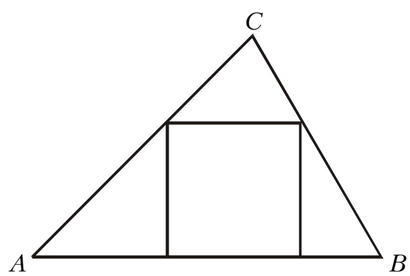

Рис. 2

Американский математик Пойа в книге «Как решать задачу?» изложил решение этой задачи в форме диалога учителя с учеником:

Учитель: — *Что неизвестно?*

Ученик: — Квадрат.

— *Что дано?*

— Только треугольник, больше ничего.

— *Что надо сделать?*

— Четыре вершины квадрата должны лежать на сторонах треугольника: две из них — на основании и по одной — на боковых сторонах.

— *Бывает ли такое?*

— Конечно, да.

— *Для всякого ли треугольника ABC такой квадрат можно построить?*

— Нет. Например, угол A может быть тупым (рис. 3).

— *А если углы A и B оба нетупые, квадрат обязательно существует?*

— Наверно. Хотя точно я не знаю.

— *Нельзя ли решить более простую задачу? Например, для прямого угла A?*

— Конечно, это очень легко: вершина квадрата будет на биссектрисе угла A. Но я не понимаю, как это обобщить: не проводить же мне биссектрису этого угла в общем случае! От нее никакой пользы нет!

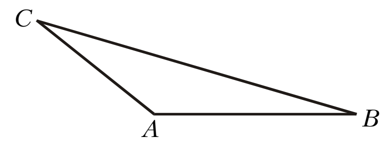

Рис. 3

— *Если задача не получается, попытайтесь удовлетворить не все сразу, а только некоторые ее требования.*

— Я могу нарисовать квадрат, две вершины которого лежат на AB.

— *Сколько таких квадратов?*

— Бесконечно много. Среди них есть совсем маленькие, есть побольше. Мне кажется, если взять такой маленький квадратик и начать его потихоньку увеличивать, то он упрется в стороны треугольника. Может быть, искомый квадрат — это самый большой из квадратов с основаниями на AB, помещающийся в треугольнике?

— *Вы правы, но пока не знаете, как это доказывается. Не будем слишком увлекаться. Напоминаю: требовалось построить квадрат циркулем и линейкой! Лучше подумайте, нельзя ли сделать чуть больше, чем Вы только что сделали? Как построить квадрат с тремя вершинами на сторонах треугольника?*

— Иными словами, как нарисовать квадрат в момент, когда он одной своей вершиной уперся в AC?

— *Да.*

— Я могу взять точку K на луче AC и опустить перпендикуляр KL на AB (рис.4). Квадрат $KLMN$ по известной

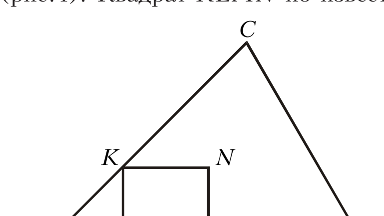

Рис. 4

стороне KL строится.

— *Таких квадратов можно построить много. Иначе говоря, квадрат не определен однозначно той частью условий, которую мы сохранили. Как он может меняться?*

— Не знаю.

— *Три вершины квадрата лежат на сторонах треугольника, а четвертая*