и верен вывод из экспериментов Галилея, бросавшего пушечные ядра и мушкетные пули с башни: «скорость падающих тел одинакова, независимо от их веса». Но мы здесь как раз и хотим использовать «сортирующее свойство» силы сопротивления воздуха. Поэтому подробнее исследуем уравнение (2).

Модуль скорости связан с горизонтальной и вертикальной составляющими соотношением $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. И тут сделаем первое упрощающее предположение. Интуитивно ясно, что вначале скорость вертикального падения дробинки много меньше скорости горизонтального движения (если не очень удаляться от ружья), а уж их квадраты и подавно сильно отличаются друг от друга. Значит, можно приближенно считать, что $v \simeq v_x$.

Теперь сделаем второе упрощающее предположение. Будем считать, что сила сопротивления воздуха при вертикальном перемещении дробинки мала по сравнению с силой тяжести (в начальный момент времени она вообще равна нулю). Можно короче сформулировать это предположение так: будем считать, что дробинка перемещается в горизонтальном направлении с большой скоростью и заметно тормозится при этом (ведь сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости), а в вертикальном направлении она перемещается как свободно падающее (без сопротивления) тело по тому же закону (1):

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{x\,\text{ср}}}\right)^2, \qquad (3)$$

в который, однако, входит средняя горизонтальная скорость $v_{x\,\text{ср}}$ на отрезке $0x$.

В этих предположениях уравнение (2) для горизонтального и вертикального движений примет вид

$$a_x = -\frac{\beta}{r}v_x^2,\ a_y = g. \qquad (4)$$

Решение второго уравнения уже найдено: это равноускоренное падение (3). Рассмотрим первое уравнение. Ускорение равно отношению изменения скорости $\Delta v_x$ ко времени $\Delta t$, которое, в свою очередь, можно выразить через скорость $v_x$, а именно: $\Delta t = \Delta x/v_x$. Итак,

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_x\frac{\Delta v_x}{\Delta x},$$

и тогда первое уравнение можно сократить на $v_x$ и получить

$$\Delta v_x = -\frac{\beta}{r}v_x\Delta x. \qquad (5)$$

Это так называемое *релаксационное уравнение*: изменение искомой величины (в данном случае – горизонтальной составляющей скорости) пропорционально самой величине. И решение этого уравнения известно – это *экспонента.* Но чтобы не пугать себя словами, посмотрим на рисунок 2 и заметим, что на начальном участке изменение величины $v_x$ очень похоже на прямую

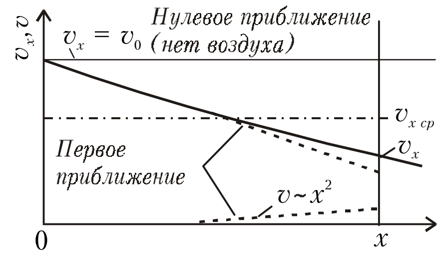


Рис. 2

(пунктир). Попробуем оценить изменение горизонтальной скорости, не решая уравнение (5) точно. Когда физики не могут (или не хотят) решать точно, они применяют *метод последовательных приближений.* Он «работает» так.

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то решение известно: $v_x = v_0$ – горизонтальная составляющая скорости не изменяется. Подставим это так называемое нулевое приближение в уравнение (5):

$$\Delta v_x \approx -\frac{\beta}{r}v_0\Delta x$$

и получим уравнение для первого приближения. Видно, что в этом приближении скорость линейно уменьшается со временем:

$$v_x = v_0\left(1 - \frac{\beta}{r}x\right). \qquad (6)$$

Это и есть пунктирная прямая на рисунке 2. Средняя скорость на участке $0x$ в этом приближении равна (штрихпунктир на рисунке)

$$v_{x\,\text{ср}} = v_0\left(1 - \frac{\beta}{2r}x\right).$$

Подставив это значение в (3), найдем уравнение баллистической кривой в первом приближении:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2}\frac{1}{1 - \frac{\beta}{2r}x}.$$

Предположим, что из ружья вылетели две дробинки радиусами $r_1$ и $r_2$, которые пробили вертикальный лист бумаги, расположенный на расстоянии $x = l$, в точках $y_1$ и $y_2$. Тогда из последнего соотношения получим два уравнения с двумя неизвестными, из которых найдем и начальную скорость вылета, и коэффициент сопротивления дробинок:

$$v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2y_1}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{r_1\left(1/r_2 - \sqrt{y_1/y_2}/r_1\right)}}},$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{\dfrac{l}{2}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{\sqrt{y_1/y_2}}{r_1}\right)}.$$

Можно ограничиться этим приближением, а можно пойти дальше. Подставив первое приближение (6) в правую часть уравнения (5), найдем второе приближение для скорости, и так далее. Все эти приближения *сойдутся* (как говорят математики) к точному решению для баллистической кривой:

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2\left(\frac{r}{2\beta x}e^{2\beta x/r} - \frac{1}{x}\right),$$

где первый сомножитель есть $y_0(x)$ (см. (1)).

И тут пора начать сомневаться. Ведь даже если эти две дробинки выталкиваются одним пыжом – все равно они могут приобрести какие-то начальные вертикальные скорости. А если взять не две дробинки, а много дробинок двух сортов (с теми же радиусами $r_1$ и $r_2$), то они в процессе движения могут сталкиваться друг с другом или взаимодействовать через те возмущения, которые они производят в воздухе. И сами дробинки могут быть не строго шаровыми, что приведет к появлению «подъемной» силы (вверх или вниз) или боковых сил, или к вращению дробинок, или... И тогда мы получим на листе бумаги разброс точек, качественно показанный на рисунке 3, в

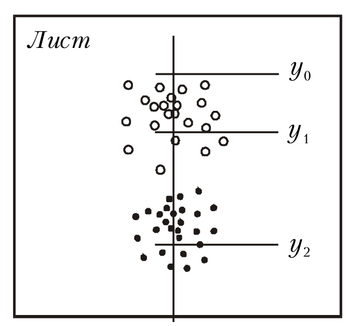


Рис. 3

котором $y_1$ и $y_2$ – это «центры тяжести» точек попадания частиц двух сортов. И, значит, траектория дробинки приобретет вероятностный смысл, а в обработке эксперимента придется использовать теорию ошибок. И тогда ...

Но это уже предмет будущих исследований наших читателей.