горизонтальный стол, и ее скорость в начальный момент была нулевой); это означает, что каждый груз движется под действием «своей» части пружинки – от центра масс до соответствующего груза. Получившиеся куски имеют большую жесткость, чем исходная пружинка, – жесткость куска, присоединенного к грузу массой m, составляет $k_1 = k(M+m)/M$, жесткость второго куска равна $k_2 = k(M+m)/m$. Очевидно, что грузы колеблются в противофазе, а период колебаний составляет

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

Искомое время равно четверти периода колебаний:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

А.Повторов

Ф1647. *В глубоком космосе на большом расстоянии от всех других тел движется длинная цилиндрическая труба, запаянная с одного конца. Неподалеку от этого конца приклеен поршень массой M = 1 кг, отделяющий от окружающего вакуума 1/100 полного объема трубы. В этой части трубы находится небольшая порция азота при температуре T = 300 К и давлении p = 0,5 атм. В некоторый момент поршень отклеивается и под давлением газа начинает скользить без трения вдоль трубы. Определите, через какое время после начала движения поршень вылетит из трубы. Длина трубы L = 5 м, площадь поперечного сечения S = 100 см², масса трубы в 10 раз больше массы поршня.*

Будем считать, что труба не вращается – иначе решение задачи усложнится (хотя при заданных массах трубы и поршня разница будет незначительной). Газ при расширении охлаждается, его внутренняя энергия переходит в кинетическую энергию трубы и поршня (масса газа оказывается очень малой, так что при расчете кинетической энергии и импульса системы с ней можно не считаться). Поскольку объем газа увеличивается во много раз и приток тепла отсутствует, можно считать, что температура газа в конце процесса будет совсем малой и в кинетическую энергию перейдет практически вся его внутренняя энергия, равная $U = 2{,}5\nu RT = 2{,}5pV = 2{,}5pSL/100 = 62{,}5$ Дж.

При отношении масс 10:1 тяжелая труба получит 1/11 часть общей энергии, а поршень получит 10/11 от энергии газа, т.е. его энергия в конце составит $E \approx 56{,}7$ Дж. Это соответствует скорости поршня $v = \sqrt{2E/M} \approx 10{,}7$ м/с. Скорость трубы при этом будет направлена в противоположную сторону и равна $0{,}1v \approx 1{,}07$ м/с. Если бы с самого начала скорости были такими, поршень вылетел бы из трубы через время $\tau = 0{,}99L/(1{,}1v) \approx 0{,}42$ с.

Оценим время набора скорости – если оно окажется существенно меньше τ, ответ можно считать полученным (строго говоря, скорость увеличивается все время, вплоть до самого вылета, но все медленнее и медленнее, а нас интересует приближенное значение). Итак, в самом начале движения на поршень действует сила $F = pS$ и его начальное ускорение составляет $a = pS/M = 500$ м/с². Если бы ускорение не менялось, поршень набрал бы свою скорость за время 0,02 с, что существенно меньше времени процесса, рассчитанного выше. Понятно, что скорость будет практически достигнута через время, которое в несколько раз больше полученного интервала 0,02 с, но и им можно для оценки пренебречь.

Таким образом, время до вылета поршня составляет примерно 0,4 секунды.

Р.Александров

Ф1648. *В сосуде объемом V = 100 л находится воздух при нормальных условиях. Снаружи – вакуум. В стенке сосуда на время τ = 1 с открывается небольшое отверстие площадью S = 0,1 см² и сразу после этого закрывается. Оцените количество вылетевших за это время молекул и их суммарную энергию. Кстати заметим, что воздух – смесь двухатомных газов.*

Оценим число вылетевших из сосуда молекул и сравним его с полным числом молекул газа N – если вылетевшая часть велика, то решение задачи сильно усложнится. Число вылетевших молекул посчитаем так же, как обычно считают число ударов молекул о стенки сосуда: $N_{\text{уд}} = 0{,}5Su_x\tau N/V$. Скорость, точнее – составляющую скорости молекулы вдоль заданного направления, оценим через энергию поступательного движения молекул: $u_x = \sqrt{kT/m} = \sqrt{RT/M_{\text{ср}}} \approx 280$ м/с. Итак, за данное время вылетела часть молекул, равная $N_{\text{уд}}/N = 0{,}5\,Su_x\tau/V \approx 0{,}14$. Видно, что для оценки можно считать неизменными давление газа в сосуде и его температуру (впрочем, можно сделать небольшие поправки, пользуясь для расчетов средними значениями). Число молекул в сосуде равно $N = N_{\text{А}}pV/(RT)$. Тогда число вылетевших молекул будет

$$N_{\text{в}} = N_{\text{уд}} = 0{,}5Su_x\tau N/V = 0{,}5Su_x\tau N_{\text{А}}p/(RT) \approx 3{,}5\cdot 10^{22}.$$

При обычных условиях длина свободного пробега молекул в воздухе очень мала, поэтому истечение молекул из отверстия скорее напоминает движение «сплошной среды» – молекулы движутся в заданном направлении толкая друг друга, но практически не обгоняя одна другую. Выделим в сосуде ту область около отверстия, из которой молекулы успеют «эмигрировать». Обозначим объем этой области V_1 и запишем для этих молекул уравнение состояния: $pV_1 = \nu_1 RT$. Вылетая наружу, эти молекулы имеют в среднем большую энергию, чем оставшиеся в сосуде, – над этой порцией газа совершил работу окружающий газ, выталкивая порцию наружу. Если считать давление газа в сосуде неизменным, то работа эта равна $A = pV_1$. Поэтому энергия вылетевшей порции газа (смесь двухатомных газов) составляет

$$U = 2{,}5\nu_1 RT + A = 3{,}5\nu_1 RT = 3{,}5\frac{N_{\text{в}}}{N_{\text{А}}}RT = 3{,}5N_{\text{в}}kT \approx 460 \text{ Дж}.$$

К.Тотов

Ф1649. *Конденсатор емкостью C состоит из двух параллельных пластин, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Конденсатор зарядили до напряжения U_0 и отключили от источника. Посредине конденсатора параллельно его пластинам вставлена еще одна*