этими гвоздями оказывается заведомо меньше чем $1 + \cos 36°$.

А.Канель, А.Спивак

М1635[2]. *Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.*

а) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали ни одной полоске ни одного из трех направлений, если $n = 10$?

б) Тот же вопрос для $n = 9$.

Когда жюри Турнира городов предлагало эту задачу школьникам, решение для произвольного n не было известно. Знали только, что максимальное возможное число отмеченных треугольничков есть 7 при $n = 10$ и 6 при $n = 9$. Однако участники турнира нашли общее решение.

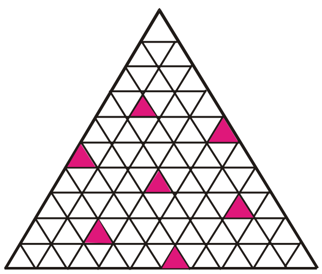


Рис.1

а) На рисунке 1 показан способ отметить 7 треугольников. Чтобы доказать, что при $n = 10$ нельзя отметить 8 треугольников, разрежем исходный треугольник средними линиями на четыре треугольника. Каждый из них состоит из 25 треугольничков. Обозначим количества отмеченных треугольничков в угловых треугольниках буквами k, l, m, а в центральном – n. Тогда $k + l + n \le 5$, поскольку два угловых треугольника вместе с центральным состоят из 5 полос. Аналогично, $l + m + n \le 5$ и $m + k + n \le 5$.

Сложим эти три неравенства: $2k + 2l + 2m + 3n \le 15$. Следовательно,

$$k + l + m + n \le \frac{1}{2}(2k + 2l + 2m + 3n) \le \frac{15}{2} < 8 .$$

б) Решим задачу для произвольного n. Рассмотрим одну из сторон исходного треугольника и пронумеруем полоски соответствующего направления следующим образом: полоска, прилегающая к стороне, пусть будет иметь номер 1; следующая за ней – номер 2; ...; полоска, состоящая из одного треугольничка, примыкающего к вершине исходного большого треугольника, получит номер n.

Теперь положение любого из n^2 треугольничков можно задать тройкой чисел – номеров полосок, в которых он лежит. (Эти тройки номеров являются дискретным аналогом барицентрических координат, при которых положение любой точки, лежащей внутри правильного треугольника, определяется расстояниями до трех его сторон. Сумма этих расстояний, как легко проверить, равна высоте треугольника.)

Введенные нами тройки номеров – «координаты» треугольничков – не могут принимать произвольные значения. Их сумма равна $n + 2$, если треугольничек расположен «острием вверх» (т.е. ориентирован так же, как исходный большой треугольник), и равна $n + 1$, если «острием вниз».

Предположим, отмечены k треугольничков, никакие два из которых не попали в одну полоску. Оценим сумму S всех их координат двумя способами. С одной стороны, сумма координат любого треугольника не превышает $n + 2$, поэтому $S \le k(n + 2)$. С другой стороны, сумма значений одной из координат по всем отмеченным треугольникам не меньше чем $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Значит,

$$3\frac{k(k+1)}{2} \le S \le k(n+2),$$

откуда $3\frac{k+1}{2} \le n+2$, т.е. $k + 1 \le \frac{2n+4}{3}$. Итак, $k \le \frac{2n+1}{3}$...

Отметить $[(2n + 1)/3]$ треугольничков можно следующим образом. Рассмотрим число $m = [(n + 1)/3]$. На основании исходного треугольника отметим $(m + 1)$-й слева треугольничек, расположенный острием вверх. В этой же вертикали отметим и все остальные треугольнички, ориентированные острием вверх (рис.2). Всего в этой вертикали отмечено $m + 1$ треугольничков. На второй горизонтальной полосе большого треугольника отметим $(2m + 1)$-й (считая слева) треугольничек, расположенный острием вверх. Отметим и все остальные треугольнички этой вертикали, ориентированные острием вверх. Всего в этой вертикали будет отмечено $n - 1 - 2m$ треугольничков.

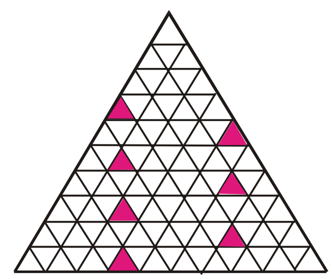


Рис.2

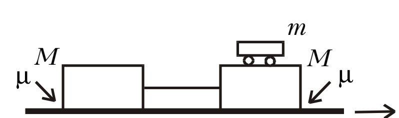
Общее количество отмеченных треугольничков есть

$$m + 1 + n - 1 - 2m = n - m = n - \left[\frac{n+1}{3}\right] = \left[\frac{2n+1}{3}\right].$$

(Чтобы проверить последнее равенство, достаточно разобрать три случая: n равно $3a$, $3a + 1$ и $3a + 2$.)

Р.Женодаров

Ф1643. *На горизонтальной подставке с коэффициентом трения μ находятся два одинаковых больших бруска массой M каждый, связанные легкой нерастяжимой натянутой нитью (см. рисунок). На гладкой верхней грани первого бруска находится небольшой гладкий грузик массой m. Подставку двигают в горизонтальном направлении с большой скоростью, направленной параллельно нити в сторону первого бруска (того, что с грузиком). Найдите силу натяжения нити, связывающей движущиеся тела, пока грузик не свалится.*



[2] *Автор этой задачи – Р.Женодаров, а не А.Шаповалов, как было указано в «Кванте» №2.*