Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1651» или «Ф1658». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1652 — М1660 предлагались на Всероссийской математической олимпиаде. Задачи Ф1658 – Ф1667, кроме Ф1663, предлагались на Соросовской физической олимпиаде.

Задачи М1651 — М1660, Ф1658 — Ф1667

М1651. Найдите а) наименьшую, б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси Ox, Oy и прямую $x = y$ суть отрезки единичной длины.

В.Тиморин

М1652. Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, ... так, что каждая окружность ω_{n+1} касается ветвей параболы и внешним образом – окружности ω_n (рис.1). Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что диаметр окружности ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине.

М.Евдокимов

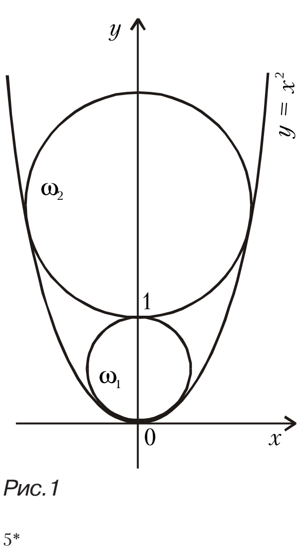

Рис.1

М1653. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

О.Подлипский

М1654. Через основания L и M биссектрисы BL и медианы BM неравнобедренного треугольника ABC провели прямые параллельно, соответственно, сторонам BC и BA до пересечения с прямыми BM и BL в точках D и E. Докажите, что угол BDE прямой.

М.Сонкин

М1655. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?

Г.Гальперин

М1656. Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не пересекаются.

В.Дольников

М1657. Назовем *лабиринтом* шахматную доску 8×8, на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Марья Ивановна пишет программу – конечную последовательность указанных команд – и дает ее Вовочке, после чего Вовочка выбирает лабиринт и помещает ладью на любое поле. Верно ли, что Марья Ивановна может