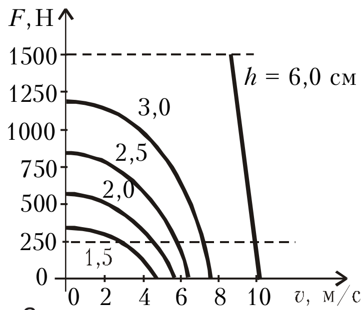

Рис. 3

тупающие за опоры, можно не учитывать. Массу кулака с учетом предплечья можно положить равной 1 кг. На рисунке 3 показана зависимость силы F от начальной скорости v при различных значениях толщины доски h. Если сила и скорость таковы, что соответствующая точка лежит выше кривой для заданного h, то доска ломается.

Теперь оценим толщину доски, которую может сломать человек. Примем реальную силу одной руки обычного человека равной $F = 250$ Н. Как видно из рисунка, продавить такой силой (показана пунктиром) даже достаточно тонкую доску толщиной 1,5 см при начальной скорости $v = 0$ обычному человеку невозможно. Для этого необходимо развить силу около 300 Н. Экспериментальное значение максимальной скорости удара кулаком оценивается как 10 м/с. Подставив в выражение для h значения $v = 10$ м/с и $F = 250$ Н, находим толщину доски: $h = 6$ см. Эта величина достаточно большая и доступная, по-видимому, только для тренированных людей, обладающих высокой техникой удара и психологически подготовленных. Однако любопытный читатель может попытаться разбить доску толщиной 2 см, поскольку требуемые значения силы и скорости доступны для среднего человека. При этом важно следовать известному психологическому «секрету» каратэ – не сомневаться в себе.

Приложение 1

Определим напряжение на поверхности доски. Проведем (см. рис.2) симметричные сечения доски AB и $A'B'$, нормальные к линии CC и находящиеся на малом расстоянии l_0 друг от друга вдоль этой линии. Рассмотрим элемент $AA'B'B$. Ввиду его малости, можно считать, что кривые AA', NN', BB' есть дуги окружностей с центрами, лежащими на так называемой оси изгиба O', перпендикулярной к плоскости рисунка. Наружная поверхность доски между точками A и A' при изгибе растянута, а внутренняя поверхность между точками B и B' – сжата. Длины кривых AA' и BB' в отсутствие изгиба одинаковы и равны длине l_0 центральной кривой NN', не меняющей своей длины при изгибе доски. Пусть R – радиус кривизны линии NN', тогда $l_0 = R\alpha$, где α – центральный угол, опирающийся на дугу NN'. Если доска не слишком толстая, т.е. $h \ll R$, длина кривой AA' будет $l_1 = (R + h/2)\alpha$, а ее удлинение из-за изгиба составит $\Delta l = l_1 - l_0 = h\alpha/2$. Следовательно, напряжение, действующие вдоль наружной поверхности доски, согласно закону Гука, есть

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{Eh}{2R}.$$

Приложение 2

Найдем радиус кривизны поверхности доски в ее середине ($y = 0$) при изгибе. Заметим, что если R есть радиус кривизны какой-либо кривой в данной точке, то проходящая через эту точку окружность радиусом R, центр которой лежит на нормали к кривой в этой точке, совпадает (по определению радиуса кривизны) с кривой в малой окрестности этой точки. Из формулы для $x(y)$ при $|\pi y/l| \ll 1$ имеем

$$x(y) = x_0 - \frac{x_0}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 y^2$$

(здесь использована известная приближенная формула $\cos\gamma = 1 - \gamma/2$ для $|\gamma| \ll 1$).

Искомая окружность радиусом R с центром в точке O' (см. рис.2), проходящая через точку с координатами $(x_0, 0)$, о которой говорилось также в Приложении 1, описывается уравнением

$$y^2 + (x - x_0 + R)^2 = R^2,$$

которое легко решить относительно смещения $x(y)$:

$$x(y) = x_0 - R + R\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}.$$

Пользуясь известной приближенной формулой $\sqrt{1-\gamma} \approx 1 - \gamma/2$ при $|\gamma| \ll 1$, находим при $|y/R| \ll 1$

$$x(y) = x_0 - \frac{y^2}{2R}.$$

Сравнивая два выражения для $x(y)$, получаем значение для радиуса кривизны:

$$R = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Приложение 3

Определим зависимость величины отклонения x_0 центра доски, лежащей на двух опорах, от величины приложенной к ней внешней силы F, распределенной вдоль центральных волокон и направленной вниз. Массой доски будем пренебрегать.

Вследствие предполагаемой симметрии, сила F распределится между опорами поровну. Рассечем мысленно доску на две части, проведя нормальное сечение через центр доски (см. рис.2), и рассмотрим условие равновесия левой половины доски. Справа на нее будет действовать внешняя сила $F/2$, сосредоточенная вблизи ее края и направленная вниз. Эта сила компенсируется силой реакции левой опоры. Сумма моментов обеих сил относительно центра доски будет, очевидно, определяться только моментом силы со стороны левой опоры:

$$M = \frac{Fl}{4}.$$

С другой стороны, этот момент уравновешивается моментом сил растяжения и сжатия, действующих в проведенном нормальном сечении на левую часть доски со стороны правой части. Значение этого момента сил можно получить из формулы для σ, модифицировав ее для вычисления напряжения в объеме доски вдоль оси Y. Как следует из вывода этой формулы (см. Приложение 1), для этого достаточно вместо отклонения $h/2$ от линии NN', соответствующего точке на внешней поверхности доски, ввести расстояние δ от этой линии ($-h/2 < \delta < h/2$). Тогда для напряжения в объеме доски получим

$$\sigma = \frac{E\delta}{R}.$$

Искомый момент упругих сил растяжения и сжатия относительно центра доски будет равен

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma d \cdot d\delta = \frac{E}{R} d \int_{-h/2}^{h/2} \delta^2 d\delta = \frac{Eh^3 d}{12R}.$$

Подставив сюда значения радиуса кривизны R и приравняв правые части двух выражений для M, находим связь между силой F и смещением x_0:

$$x_0 = \frac{3Fl^3}{\pi^2 Eh^3 d}.$$

Это равенство можно переписать в виде $F = kx_0$, откуда следует искомое выражение для коэффициента жесткости k эквивалентной пружины:

$$k = \frac{\pi^2 Eh^3 d}{3l^3}.$$