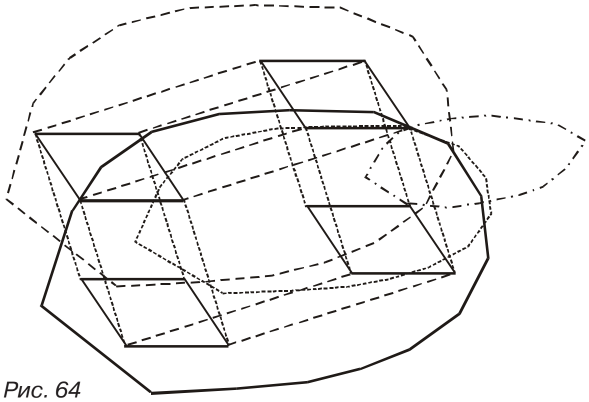

Рис. 64

..., n, содержится в F_{i-1}. (Чтобы это утверждение имело смысл при $i = 1$, пусть $F_0 = F$.) Более того, вместе с фигурой F_i в F_{i-1} содержится ее сдвиг на вектор $-\vec{v}_i$.

Ширина фигуры F_n не меньше чем $d - |\vec{v}_1| - \ldots - |\vec{v}_n| > 0$. Поэтому существует точка $O \in F_n$. Если начать построение с нее, то легко понять, что остов $S(-\vec{v}_n)$ будет содержаться в F_{n-1}, остов $S(-\vec{v}_{n-1}, -\vec{v}_n)$ – в F_{n-2}, ..., ..., $S(-\vec{v}_1, \ldots, -\vec{v}_n)$ – в F (рис.64).

Доказательство леммы Банга

Возьмем наугад произвольную вершину остова. Укажем способ, двигаясь в соответствии с которым по ребрам остова, мы дойдем до вершины, не лежащей ни в одной из данных полос.

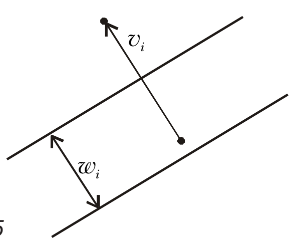

Рис. 65

Если вершина не лежит ни в одной из полос, то двигаться никуда не надо. Если же она содержится в некоторой полосе p_i, рассмотрим выходящее из этой вершины ребро остова, соответствующее вектору $\vec{v}_i$ (рис.65). Длина этого ребра равна $|\vec{v}_i|$. Она больше, чем ширина w_i полосы p_i, поэтому второй конец ребра расположен вне полосы p_i. Туда и надо идти. (Если вершина принадлежала сразу нескольким полосам, то можно идти по любому из соответствующих ребер.) Применяя к новой вершине остова то же правило, мы перейдем в следующую вершину, и т.д.

К сожалению, чтобы доказать, что мы убежим из всех полосок, недостаточно сказать, что можно выбежать из любой полоски. Дело в том, что, выбежав на некотором шаге из полосы, мы не имеем гарантии, что не вернемся в нее же через несколько шагов. И все-таки процесс убегания завершится (причем менее чем за 2^n шагов).

Чтобы доказать это, рассмотрим произвольное ребро PQ остова S_n (рис.66). Оно соответствует некоторому вектору $\vec{v}_i$ и полосе p_i. Ребру

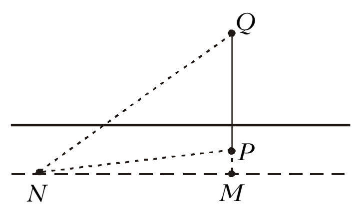

Рис. 66

PQ сопоставим разность квадратов $QM^2 - PM^2$ расстояний от точек Q и P до оси полосы p_i (ось полосы – это прямая, параллельная ее краям и делящая ее на две полосы одинаковой ширины). По теореме Пифагора,

$$QN^2 - PN^2 = \left(QM^2 + MN^2\right) - \left(PM^2 + MN^2\right) = QM^2 - PM^2$$

для любой точки N оси полосы, так что рассматриваемая величина есть разность расстояний от точек Q и P до любой точки N оси полосы.

Ломаной $A_1A_2\ldots A_n$, состоящей из ребер остова, сопоставим сумму чисел, сопоставленных ее звеньям $A_1A_2, A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$. Отметим, что если ломаная возникла в процессе убегания от полосок, то соответствующее ломаной число положительно (начало всякого ребра A_iA_{i+1} лежит в соответствующей этому ребру полосе, а конец – не лежит).

Лемма. *Любому замкнутому (т.е. заканчивающемуся там же, где начался) маршруту по вершинам остова сопоставлено число 0.*

Доказательство. Рассмотрим сначала короткий замкнутый маршрут

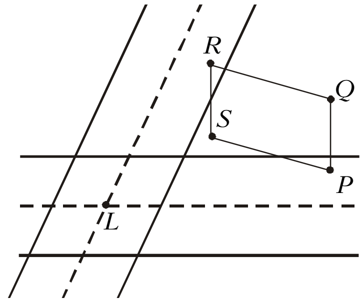

Рис. 67

– параллелограмм $PQRS$ (рис.67). Ребрам PQ, QR, RS и SP сопоставлены числа $QL^2 - PL^2$, $RL^2 - QL^2$, $SL^2 - RL^2$ и $PL^2 - SL^2$. Их сумма равна нулю.

Упражнение 35. Разберите самостоятельно изображенный на рисунке 68 случай, когда оси полос параллельны.

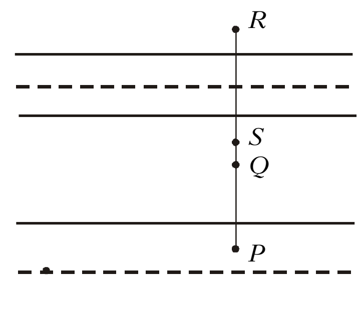

Рис. 68

Если маршрут состоит более чем из четырех ребер, то, выбрав любую его точку в качестве начальной, запишем последовательность ребер, из которой маршрут состоит. То, что по любому параллелограмму сумма сопоставленных его сторонам величин равна 0, означает, что можно, не меняя сопоставленной всему маршруту величины, менять маршрут, переставляя соседние векторы. Рассмотрев любой входящий в маршрут вектор и противоположный ему, перестановками будем приближать их друг к другу. Когда они окажутся рядом, эти два вектора исключим из маршрута. Лемма доказана. (Тем, кто знаком с понятием n-мерного куба, проще всего понять это доказательство, если вообразить, что «стягивается в точку» замкнутый путь, состоящий из ребер n-мерного куба.)

Из этой леммы как раз следует, что в процессе убегания от полосок вершины не повторяются. (Последнее утверждение могло бы оказаться неверным, если бы мы рассматривали не только невырожденные остовы. Но утверждение все же было бы верно и для вырожденных остовов,