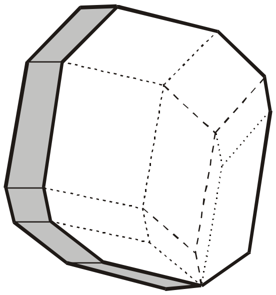

Рис. 58

доказательства теоремы Банга—Тарского, отметим, что любой центрально-симметричный выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы со сторонами, равными и параллельными сторонам многоугольника. Идея доказательства показана на рисунке 58.

Определение остова

Рассмотрим систему векторов $\vec{v}_1$, … …, $\vec{v}_n$ и точку O (рис.59). Понять,

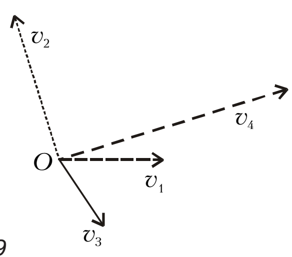

Рис. 59

что такое остов, поможет следующее упражнение.

Упражнение 33. От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул один час со скоростью $\vec{v}_1$, второй час – со скоростью $\vec{v}_2$, …, n-й час – со скоростью $\vec{v}_n$. Пожар распространялся от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем загоревшиеся участки продолжали гореть). Какой участок выгорел за n часов?

Точное определение остова таково. Сдвинем точку O на вектор $\vec{v}_1$. Соединив полученную точку с исходной, получим отрезок S_1 (рис. 60). Сдвинем S_1 на вектор $\vec{v}_2$. Получим параллелограмм S_2. Из S_2 при помощи вектора $\vec{v}_3$ получаем систему отрезков S_3. Вообще, чтобы получить S_{k+1}, мы к S_k добавляем образ S_k при параллельном переносе на вектор $\vec{v}_{k+1}$. Кроме того, добавляем отрезки, соединяющие вершины остова S_k с вершинами, в которые они переходят при сдвиге на $\vec{v}_{k+1}$. Таким образом по системе векторов $\vec{v}_1$, …, $\vec{v}_n$ мы строим остов $S_n = S(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$. Произвольная вершина этого остова получается из начальной точки O сдвигом на вектор $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$, где коэффициенты a_i суть 0 или 1. Например, точка P рисунка 61 получена из O сдвигом на $\vec{v}_2$, точка Q получена сдвигом на $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$, а $\vec{OR} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4$.

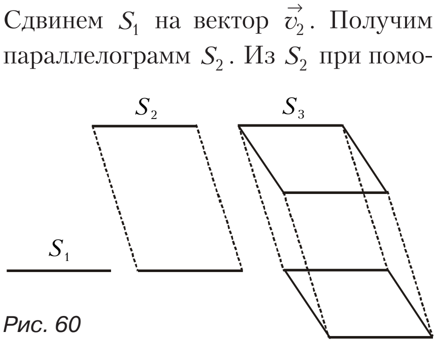

Рис. 60

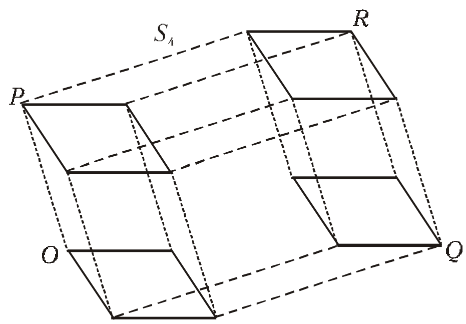

Рис. 61

Так как число вершин системы S_{k+1}, вообще говоря, вдвое больше числа вершин системы S_k, то число вершин остова S_n равно 2^n. Мы употребили выражение «вообще говоря» из-за того, что какие-то вершины могли совпасть, как это произошло , например, на рисунке 50, где в центре правильного шестиугольника совпали две вершины его остова.

Остов назовем *невырожденным*, если все его вершины различны. Из каждой вершины невырожденного остова S_n исходит ровно n ребер. (Некоторые ребра могут, как это показано на рисунке 57, лежать на одной прямой. На существо дела это не влияет. Надо только не дать себя запутать случайными совпадениями.) При доказательстве теоремы Банга–Тарского будем рассматривать только невырожденные остовы. Мы имеем право это делать, поскольку длины векторов $\vec{v}_i$, как вы помните, можно чуточку варьировать.

Упражнение 34. Докажите, что набор векторов $\vec{v}_1$, …, $\vec{v}_n$ дает невырожденный остов в том и только том случае, когда никакой вектор этого набора не представим в виде $\vec{v}_k = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots$ $\ldots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1}$, где коэффициенты a_i суть 0, 1 или −1.

Итак, для того чтобы построить остов выпуклого центрально-симметричного $2n$-угольника $A_1A_2 \ldots \ldots A_nA_{n+1} \ldots A_{2n}$, достаточно взять $\vec{v}_1 = \vec{A_1A_2}$, $\vec{v}_2 = \vec{A_2A_3}$, …, $\vec{v}_n = \vec{A_nA_{n+1}}$, а в качестве начальной точки O – точку A_1.

Почему остов можно разместить в фигуре?

Сдвинем фигуру F на вектор $\vec{v}_1$ и пересечение полученной фигуры F' с F обозначим через F_1 (рис.62). Как пересечение выпуклых фигур, фигура F_1 выпуклая. Ее ширина не меньше чем $d - |\vec{v}_1|$.

Сдвинем F_1 на вектор $\vec{v}_2$ и обозначим через F_2 пересечение полученной фигуры с F_1. Ширина фигуры F_2 не меньше чем $d - |\vec{v}_1| - |\vec{v}_2|$.

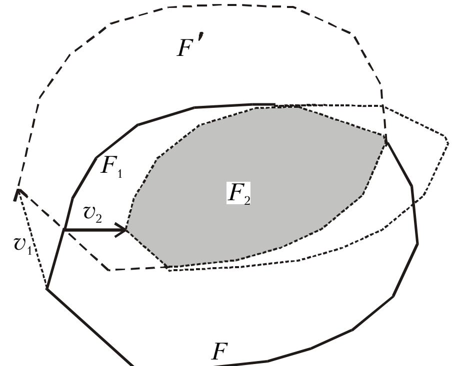

Рис. 62

Будем сдвигать и пересекать фигуры до того момента, когда из F_{n-1} получим F_n (на рисунке 63 $n = 4$). Каждое из множеств F_i, где $i = 1, \ldots$

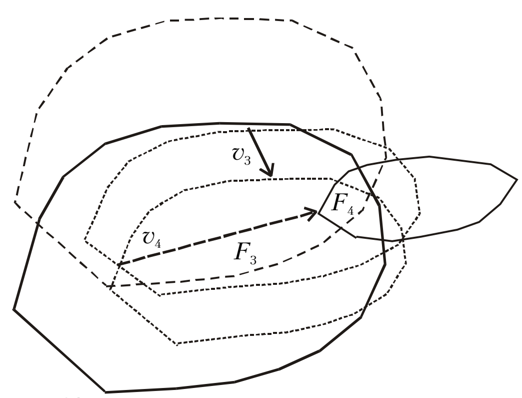

Рис. 63