мотетии

$$\frac{KL}{KM}+\frac{ML}{MK}=\frac{KL+LM}{KM}$$

равна 1.

Упражнение 26. Дан прямоугольник, не являющийся квадратом. Разместите внутри него два непересекающихся подобных ему с коэффициентами k_1 и k_2 прямоугольника так, чтобы сумма k_1+k_2 была больше 1.

Решение. Выберем точку на диагонали прямоугольника вблизи его вершины[1] и проведем через нее прямые параллельно сторонам (рис.40). Прямоугольник окажется разбит на четыре части, две из

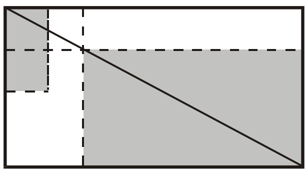

Рис. 40

которых содержат отрезки его диагонали и являются прямоугольниками, гомотетичными исходному. Сумма коэффициентов гомотетии равна 1.

Отразив меньший из прямоугольничков относительно биссектрисы его угла, являющегося заодно и углом исходного прямоугольника, видим, что образовался зазор, который позволяет увеличить прямоугольничек.

Упражнение 27. Ограниченная фигура F разрезана прямой на две части. Докажите, что нельзя вписать в них гомотетичные образы фигуры F так, чтобы сумма коэффициентов гомотетии была больше 1.

Упражнение 28. Между параллельными опорными прямыми фигуры F провели на равных расстояниях одну от другой n параллельных прямых (рис.41). Дока-

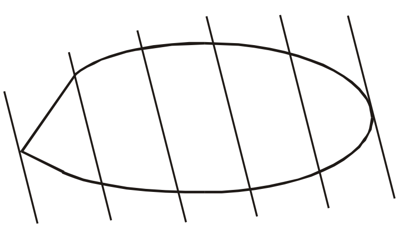

Рис. 41

жите, что ни в одну из $n+1$ частей, на которые оказалась разбита фигура F, нельзя поместить ее гомотетичный образ с коэффициентом гомотетии, превосходящим $1/(n+1)$.

Замечание. Американский математик Дэвенпорт выдвинул гипотезу: как бы ни были расположены n прямых, хотя бы в одной из частей, на которые они делят

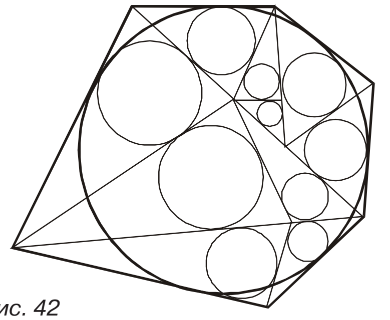

Рис. 42

выпуклую ограниченную фигуру F, можно разместить гомотетичный образ фигуры F при гомотетии с коэффициентом $1/(n+1)$.

Упражнение 29. Если описанный около окружности радиусом r многоугольник разбит на треугольники, то сумма $r_1+\ldots+r_n$ радиусов их вписанных окружностей не меньше r (рис.42).

Свойство наибольшей хорды

Прежде чем применять гомотетии для доказательства теоремы Банга–Тарского, рассмотрим всевозможные хорды выпуклой фигуры F, параллельные некоторому фиксированному направлению. Опорные прямые, проведенные в концах хорды AB рисунка 43, не параллельны одна другой. Не параллельны и опорные прямые,

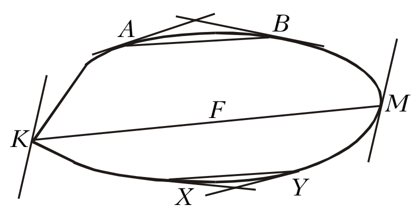

Рис. 43

проведенные в концах хорды XY, но пересекаются они «с другой стороны». Интуиция подсказывает, что для какой-то промежуточной между AB и XY хорды опорные прямые окажутся параллельными.

Лемма. *Через концы K и M самой длинной[2] из семейства параллельных хорд выпуклой фигуры F можно провести параллельные опорные прямые.*

Доказательство. Проведем всевозможные лучи с началом K, пересекающие фигуру F (рис.44). Образуется угол K_1KK_2. Аналогично строим угол M_1MM_2. Проведем лучи ML_1 и ML_2 параллельно лучам KK_1 и KK_2

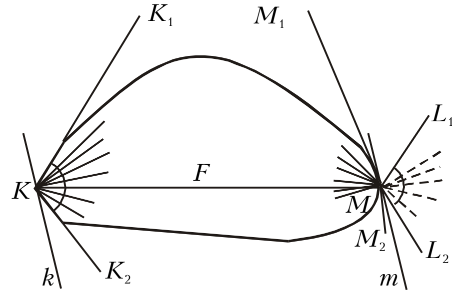

Рис. 44

соответственно.

Отделим углы M_1MM_2 и L_1ML_2 один от другого прямой m – и останется лишь провести через точку K прямую k, параллельную m. Параллельные опорные прямые построены!

Упражнение 30. Мы использовали не доказанный (хотя и очевидный) факт, что углы M_1MM_2 и L_1ML_2 можно отделить один от другого прямой, т. е. что $\angle K_1KM+\angle KMM_1\le 180°$ и $\angle K_2KM+\angle KMM_2\le 180°$. Докажите эти неравенства.

Упражнение 31. Провели две опорные прямые выпуклой замкнутой фигуры, расстояние между которыми равно ширине фигуры. Докажите, что фигура имеет хорду с концами на этих прямых, которая перпендикулярна этим прямым.

Указание. Проведите хорды, перпендикулярные опорным прямым (рис. 45). Выберите из них самую длинную. Если ее

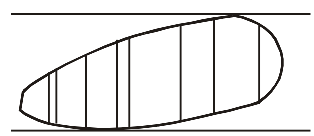

Рис. 45

длина меньше, чем расстояние между опорными прямыми, то проведите через концы этой хорды параллельные опорные прямые.

Ширина пересечения фигуры со своим сдвигом

Следующая лемма потребуется нам для доказательства теоремы Банга–Тарского.

Лемма. *Пусть F – выпуклая фигура, w – ее ширина, F' – фигура, полученная из F параллельным переносом на вектор $\vec{v}$ (рис.46). Тогда*

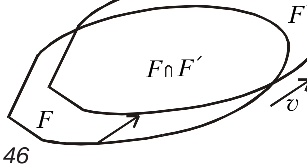

Рис. 46

[1] *Это нужно, чтобы при описываемой далее симметрии прямоугольничек не вылез из границ исходного прямоугольника.*

[2] *Существование такой хорды мы не доказываем, поскольку соответствующие теоремы математического анализа не имеют прямого отношения к теме статьи.*