Чтобы доказать теорему Банга–Тарского, мы введем понятие остова $S(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, построенного по системе векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Мы докажем, что остов можно расположить внутри F. Для этого будет использована лемма о ширине пересечения выпуклой фигуры со своим сдвигом. Завершит доказательство теоремы применение леммы Банга.

Лемма Банга. *Пусть каждому из векторов $\vec{v}_i$, где $i = 1, \ldots, n$, поставлена в соответствие перпендикулярная полоса p_i, края которой перпендикулярны вектору $\vec{v}_i$, а ширина меньше $\left|\vec{v}_i\right|$. Тогда система полос $p_1, \ldots, p_n$ не покрывает остова $S(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$. (Более того, обязательно найдется вершина остова, не лежащая ни в одной из полос.)*

Тот, кто преодолеет весь этот путь, будет приятно удивлен: все леммы не только являются этапами доказательства теоремы Банга–Тарского, но и представляют самостоятельный интерес.

Вот пример применения леммы Банга.

Оценка снизу в задаче M1600

В первой части статьи решена задача M1600 – доказано, что если на плоскости дано конечное число полос, сумма ширин которых равна $\pi + 2$, то параллельными сдвигами этих полос можно покрыть круг единичного радиуса. Оказывается, число $\pi + 2$ нельзя заменить никаким числом, меньшим π. Более того, частным случаем леммы Банга является следующее утверждение:

Если к каждой стороне вписанного в единичный круг правильного $2n$-угольника построить перпендикулярную полосу, то получим n полос, параллельными сдвигами которых нельзя покрыть никакой $2n$-угольник, гомотетичный исходному с коэффициентом гомотетии, большим 1.

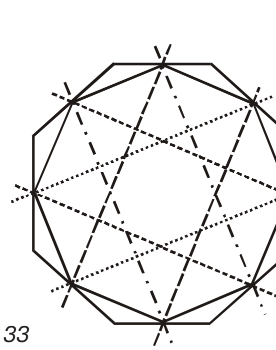

Рис. 33

Полосы, образованные перпендикулярами к сторонам правильного n-угольника, покрывают не только этот многоугольник, но и больший правильный многоугольник (рис.33). Его стороны не параллельны сторонам исходного многоугольника, так что никакого противоречия нет. Мы только видим, что слово «гомотетичный» нельзя заменить словом «подобный».

Важно, что покрыты должны быть не только граничные, но и внутренние точки многоугольника. Например, на рисунке 34 граница шестиугольника покрыта полосами даже

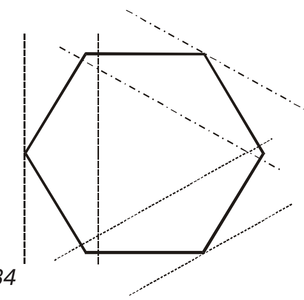

Рис. 34

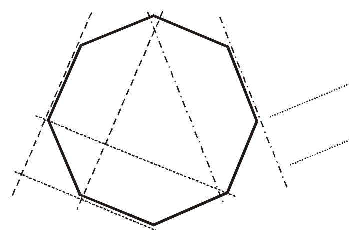

Рис. 35

более узкими, чем сторона шестиугольника. А для восьмиугольника (рис.35) одна полоса оказалась лишней!

Упражнение 25. Перпендикулярные сторонам правильного $2n$-угольника полосы покрывают не только описанную окружность, но даже изображенный на рисунке 33 описанный вокруг этой окружности $2n$-угольник. Докажите, что никакой больший правильный $2n$-угольник сдвигами рассматриваемых полос покрыть невозможно.

Гомотетичные образы

Подготовку к доказательству теоремы Банга–Тарского начнем издалека. Пусть выпуклая фигура F разрезана на выпуклые фигуры. Впишем в них фигуры, гомотетичные F (рис.36).

Гипотеза. *При любом разрезании гомотетичные F фигуры можно выбрать настолько большими, чтобы сумма коэффициентов гомотетии была не меньше 1.*

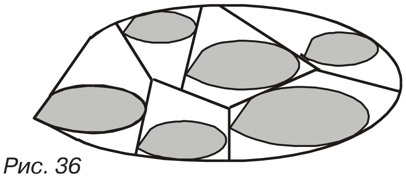

Рис. 36

Мы умеем доказывать следующий частный случай гипотезы:

Если выпуклая фигура F разрезана прямой l на две части, то в эти части можно вписать гомотетичные образы фигуры F так, чтобы сумма соответствующих коэффициентов гомотетии равнялась 1.

Для доказательства проведем опорные прямые m и k, параллельные прямой l (рис. 37). Отметим на пря-

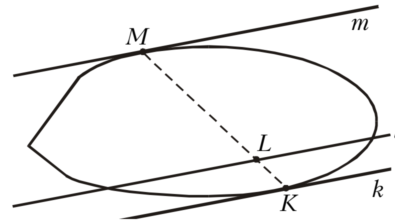

Рис. 37

мых m и k точки M и K «соприкосновения» с фигурой F, т. е. точки, принадлежащие одновременно и соответствующей прямой, и границе фигуры F. (Эти точки не всегда определены однозначно — см. рис. 38.)

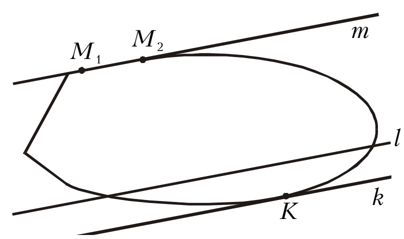

Рис. 38

Обозначим буквой L точку пересечения отрезка KM с прямой l. Образы $H_K^{KL/KM}(F)$ и $H_M^{ML/MK}(F)$ фигуры F при гомотетиях с центрами K и M и коэффициентами KL/KM и ML/MK содержатся в частях, на которые прямая l делит фигуру F (рис.39). Сумма коэффициентов го-

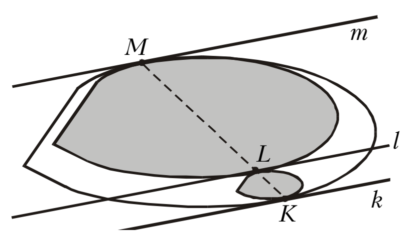

Рис. 39