Покрытия полосками

М.СМУРОВ, А.СПИВАК

Во второй части статьи доказана теорема Банга—Тарского: если выпуклая фигура F покрыта полосами, то ширина фигуры не превышает суммы ширин полос. Сформулированы гипотезы Банга и Дэвенпорта, рассказано о некоторых других проблемах комбинаторной геометрии.

Покрытия круга и выход в пространство

Очевидно, круг диаметра d можно покрыть параллельными друг другу полосами, сумма ширин которых равна d (рис.31).

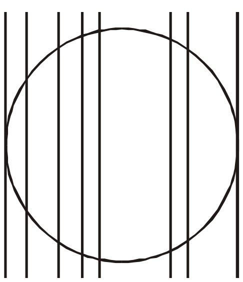

Рис. 31

Задача 5. *Нельзя ли так расположить полосы разных направлений, чтобы они покрыли круг большего диаметра, чем сумма ширин полос?*

Решение. Нельзя. Доказательство использует, как ни странно, выход в пространство.

Пусть круг диаметра d покрыт n полосами ширин $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Рассмотрим сферу, экватором которой служит этот круг, т. е. сферу, центр

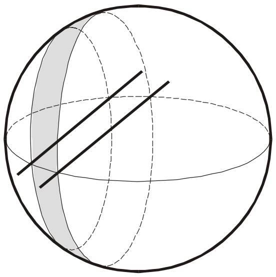

Рис. 32

и радиус которой совпадают с центром и радиусом круга (рис.32). Проведя через границы полос плоскости, перпендикулярные экватору, сопоставим каждой полосе сферическую полоску (или шапочку, если круг пересечен только одной из ограничивающих полосу прямых).

Теперь используем замечательный (и известный уже Архимеду) факт: *площадь сферической полоски, высекаемой на сфере двумя параллельными плоскостями, выражается через расстояние w между плоскостями и диаметр d сферы формулой πdw.* (Обе плоскости, разумеется, должны пересекать сферу или хотя бы касаться ее.) Поскольку площадь сферы равна πd^2 и поскольку сфера должна быть полностью покрыта, имеем

$$\pi dw_1 + \pi dw_2 + \ldots + \pi dw_n \ge \pi d^2,$$

откуда

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n \ge d. \qquad (1)$$

Упражнение 21. В круге радиусом R расположен кружок радиусом r. Сколько прямых необходимо провести, чтобы хотя бы одна из них пересекла кружок? (Подразумевается, что мы видим круг, но не видим кружок.)

Указание. Прямая пересекает кружок в том и только том случае, когда центр кружка удален от нее не более чем на расстояние r, т. е. лежит в соответствующей полосе шириной $2r$.

Упражнение 22. Квадрат разрезали на прямоугольники. Может ли сумма меньших сторон прямоугольников оказаться меньше стороны квадрата?

Замечание. Это упражнение предлагалось десятиклассникам на московской олимпиаде 1998 года.

Упражнение 23. Докажите, что если квадрат покрыт полосами, то сумма ширин полос не может быть меньше стороны квадрата.

Указание. Впишите в квадрат круг.

Теорема Банга–Тарского

В 1932 году польский математик А.Тарский поставил задачу: доказать неравенство (1) для любой ограниченной выпуклой фигуры F.

В 1950 году датский математик Т. Банг решил эту задачу и поставил проблему, не решенную по сей день. Чтобы сформулировать ее, запишем неравенство (1) в виде

$$\frac{w_1}{d} + \frac{w_2}{d} + \ldots + \frac{w_n}{d} \ge 1,$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_n$ – ширины полос, покрывающих выпуклую фигуру F, d — ширина фигуры F. Банг предложил делить ширину w_i полосы не на (наименьшую) ширину d, а на ширину d_i фигуры F в направлении i-й полосы:

$$\frac{w_1}{d_1} + \frac{w_2}{d_2} + \ldots + \frac{w_n}{d_n} \ge 1. \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{w_i}{d} \ge \frac{w_i}{d_i}$, из неравенства (2) следует неравенство (1).

В 1991 году американский математик К. Болл доказал неравенство Банга (2) в случае, когда фигура F имеет центр симметрии.

Упражнение 24. В кубическом куске сыра имеется дырка – сферическая пустота диаметром в $1/1998$ длины ребра. Каким минимальным числом плоских разрезов ее можно обнаружить? (Считайте, что кусок сыра после разрезания не распадается.)

План доказательства теоремы Банга–Тарского

Доказательство будем вести «от противного». Предположим, что выпуклая фигура F покрыта полосами, сумма ширин $w_1 + \ldots + w_n$ которых меньше ширины d фигуры F.

Построим векторы $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, каждый из которых перпендикулярен границе соответствующей полосы и равен по длине ее ширине. Как и в решении задачи М1600 в первой части статьи (см. рис. 16), выбор одного из двух возможных (противоположных) направлений каждого из векторов $\vec{v}_i$ произволен.

Поскольку сумма $w_1 + \ldots + w_n$ ширин полос строго меньше ширины d фигуры, можно увеличить длину каждого из векторов $\vec{v}_i$ таким образом, чтобы сумма длин полученных векторов по-прежнему была м еньше d. Теперь длины векторов будут больше, чем ширины соответствующих полос: $|\vec{v}_i| > w_i$ при $i = 1, \ldots, n$, но $|\vec{v}_1| + \ldots + |\vec{v}_n| < d$.

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №4.