# Покрытия полосками

**М.СМУРОВ, А.СПИВАК**

*Полоса – часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми.*

На московской олимпиаде 1997 года одиннадцатиклассники решали задачу, вошедшую в «Задачник «Кванта»:

**М1600.** *На плоскости даны: конечное число полос, сумма ширин которых равна 100, и круг радиусом 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они вместе покрыли круг.*

С ней справился только один из 410 участвовавших в олимпиаде одиннадцатиклассников. Между тем при обсуждении варианта многие члены жюри, даже не желая слушать условие до конца, заявляли, что задача им известна. Они путали М1600 со знаменитой задачей, о которой будет рассказано во второй части статьи.

Число 100 играло в условии роль «большого числа». Мы докажем, что достаточно меньшей суммарной ширины полос, равной $\pi + 2$.

В то же время, 100 нельзя заменить ни на какое число, меньшее $\pi$. Чтобы доказать это, впишем в круг с радиусом 1 правильный $2n$-угольник. Через концы каждой его стороны проведем перпендикулярные ей прямые (рис. 1). Получим $n$ полос. Сумма их ширин равна половине периметра $2n$-угольника. Она стремится к $\pi$ при возрастании $n$. Во второй части статьи мы докажем, что если сузить полосы (т.е. уменьшить их ширины), то никакими их сдвигами рассматриваемый $2n$-угольник не покроешь.

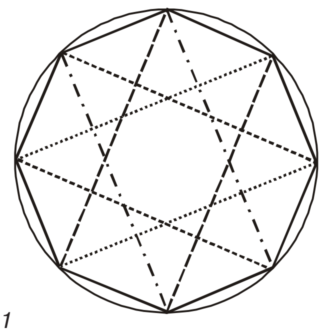

*Рис. 1*

Впрочем, основное содержание статьи — рассказ о некоторых трудных и интересных проблемах комбинаторной геометрии. Их формулировки привлекательны и просты. Но на многие вопросы еще нет ответа.

## Что такое ширина?

### Ширина по направлению

Начнем с простой ситуации. Пусть даны фигура $F$ и одна полоса (рис.2). Можно ли полосу параллельно перенести («сдвинуть») так, чтобы накрыть $F$?

Разумеется, некоторые фигуры (например, угол) вообще не помещаются ни в какую полосу. Поэтому дальше будем предполагать, что фигура $F$ является ограниченной, т.е. содержится в некотором круге. Для таких

Иллюстрация М.Константиновой

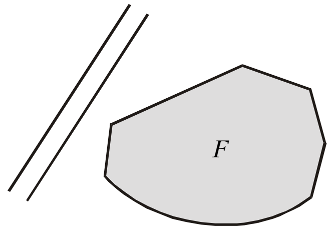


*Рис. 2*

фигур ответ определяется тем, что больше – ширина полосы *или ширина фигуры в соответствующем направлении*, т.е. ширина самой узкой полосы, в которой содержится $F$ и края которой параллельны заданному направлению.

Чтобы получить такую полосу, можно взять сначала полосу соответствующего направления, достаточно широкую для того, чтобы в ней содержалась фигура $F$ (на рисунке 3 такая полоса ограничена прямыми $m$ и $n$). Затем края полосы надо двигать друг к другу до тех пор, пока они не упрутся в $F$. На рисунке 3 эти прямые – $a$ и $b$. Они называются *опорными прямыми* фигуры $F$.

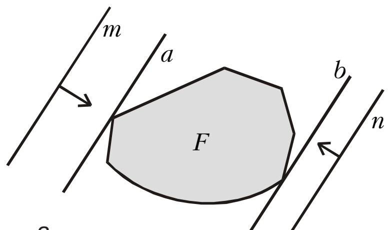


*Рис. 3*

Каждому направлению соответствует своя пара опорных прямых. Как уже было сказано, расстояние между ними, т.е. ширина получившейся полосы, называется шириной фигуры $F$ в соответствующем направлении. Например, если $F$ – квадрат со стороной 1, то ширина, в зависимости от направления, меняется от 1 до $\sqrt{2}$.

Если $F$ – треугольник, то ширина меняется от минимальной, равной наименьшей из высот треугольника, до максимальной, равной наибольшей его стороне.

Доказать последнее утверждение о максимальной ширине совсем просто: с одной стороны, расстояние между опорными прямыми, перпендикулярными стороне треугольника, не может быть меньше длины этой стороны. С другой стороны, расстояние между параллельными опорными прямыми треугольника не превосходит длины стороны, концы которой лежат на этих прямых (например, ширина горизонтальной полосы рисунка 4 не превосходит $AB$).

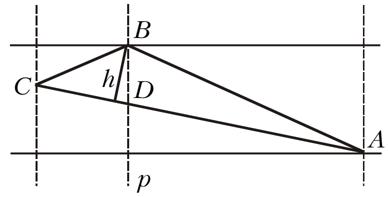


*Рис. 4*

**Упражнение 1.** *Докажите, используя рисунок 4, что ширина треугольника по любому направлению не меньше минимальной из высот треугольника.*

**Упражнение 2**. *Какой должна быть ширина полосы бумаги, чтобы из нее можно было вырезать треугольник со сторонами 15 см, 20 см и 25 см?*

### Фигуры постоянной ширины

Ширина круга во всех направлениях одинакова и равна диаметру круга. Хотя это и не связано прямо с темой статьи, отметим, что существуют отличные от круга выпуклые фигуры постоянной ширины.

Пример – *треугольник Рело*. Он получается, если нарисовать правильный треугольник $ABC$ и дуги с центрами $A$, $B$, $C$ (рис. 5). Есть и другие примеры. Так, вместо правильного треугольника можно было взять правильный пятиугольник (или даже

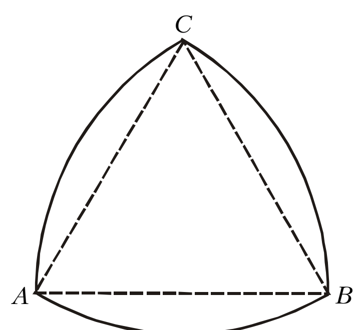


*Рис. 5*

выпуклый пятиугольник, все диагонали которого одной длины).

### Определения

Если ширина фигуры зависит от направления, то естественно рассмотреть наименьшую и наибольшую из ширин. (В *Приложении* будет объяснено, почему эти величины действительно существуют. Пока лучше на это не отвлекаться.)

**Определение 1.** *Шириной* фигуры называется наименьшая из ее ширин по направлениям, т.е. ширина самой узкой полосы, которой можно покрыть эту фигуру (или, что то же самое, ширина наименьшей полосы, из которой фигуру можно вырезать).

**Определение 2.** *Диаметром* замкнутой [1] ограниченной фигуры называется наибольшее из расстояний между ее точками.

**Упражнение 3.** *Найдите диаметр а) треугольника, б) прямоугольника, в) полукруга.*

**Упражнение 4.** *Для каких треугольников диаметр совпадает с диаметром описанной окружности?*

**Упражнение 5.** *Докажите, что а) ширина прямоугольника равна его наименьшей стороне; б) ширина параллелограмма равна его наименьшей высоте.*

**Упражнение 6.** *Докажите, что ширину выпуклого многоугольника можно найти следующим образом: сначала для каждой стороны найти расстояние до наиболее удаленной от нее вершины, а затем из этих расстояний выбрать наименьшее.*

**Упражнение 7.** *Докажите, что диаметр фигуры совпадает с максимальной из ее ширин по направлениям.*

**Упражнение 8.** *а) Может ли опорная прямая не иметь с ограниченной фигурой ни одной общей точки? б) Может ли опорная прямая неограниченной замкнутой фигуры не иметь с фигурой ни одной общей точки?*

* * *

Подведем итог в задаче о покрытии фигуры одной полосой: если о направлении полосы ничего не известно, то для того, чтобы ее параллельным сдвигом можно было покрыть фигуру, достаточно потребовать, чтобы ширина полосы была не меньше диаметра фигуры.

Покрытия квадрата двумя полосами обсуждены в разделе «Гипотеза о покрытиях». Покрытия тремя и более полосами примененным там методом не изучишь. Сейчас перейдем к задаче, в условии которой нет слов «полоса» и «ширина». Но именно ширина – ключ к решению.

## Разделяющая прямая

### Правильные треугольники

**Задача 1.** *Если в правильном треугольнике со стороной 1 расположены не налегающие друг на друга правильные треугольники со сторонами $a$ и $b$, то $a + b \le 1$ (рис. 6).*

**Решение.** Как бы ни были располо-

[1] *Замкнутой называется фигура, которая содержит все точки своей границы.*

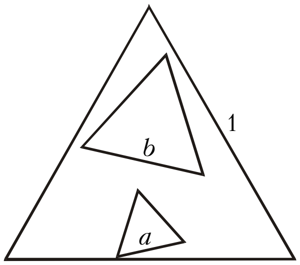


Рис. 6

жены не пересекающие друг друга треугольники, можно провести такую прямую $l$ (рис. 7), что один треугольник окажется по одну сторону от $l$, а другой – по другую сторону (существование разделяющей прямой $l$ доказано в *Приложении*).

Прямая $l$ разобьет треугольник $ABC$ на две части – треугольник и четырехугольник (который выродится в треугольник, если $l$ пройдет через вершину $\Delta ABC$). Пусть, для определенности, $AD \ge BE$.

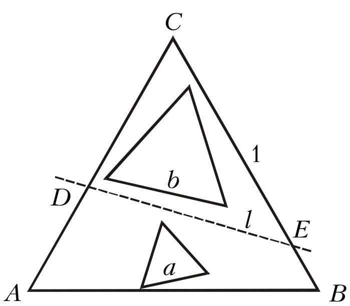


Рис. 7

Проведем через точку $D$ прямые параллельно сторонам $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$. Получим две полосы (рис. 8), одна из которых содержит четырехугольник $ABED$, а другая – треугольник $CDE$.

Поскольку четырехугольник $ACED$ расположен в полосе шириной $AD\sqrt{3}/2$, для ширины $a\sqrt{3}/2$ правильного треугольника со стороной $a$ выполняется неравенство $a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le AD\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a \le AD$. Аналогично, правильный треугольник со стороной $b$ лежит в полосе шириной $DB\sqrt{3}/2$. Значит, $b\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le DB\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $b \le DB$.

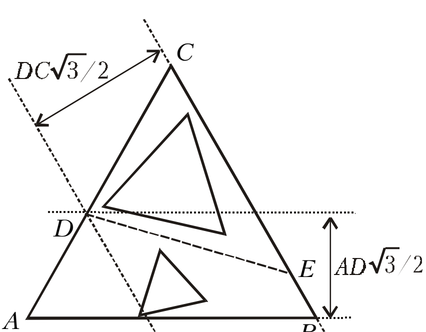


Рис. 8

Итак, $a \le AD$, $b \le DC$, откуда $a + b \le AD + DC = AC$.

**Упражнение 9.** *Дан треугольник, величина одного из углов которого равна 60°. Разместите в нем равносторонний треугольник наибольшей возможной площади.*

*Замечания.* В решении задачи 1 использовано очевидное (и важное!) свойство: если некоторая фигура $A$ является подмножеством фигуры $B$, то ширина $A$ не может быть больше ширины $B$.

Между прочим, ширина фигуры может совпадать с шириной ее собственной части. Иными словами, от некоторых фигур можно отрезать кусочек, не уменьшив при этом их ширину. Например, ширина прямоугольника $a \times b$, где $a < b$, равна $a$. Такова же ширина содержащегося в нем квадрата со стороной $a$. (Ширина вписанного в этот квадрат круга тоже равна $a$.)

Ширины треугольника $CDE$ и четырехугольника $ABED$ равны ширинам полос рисунка 8 (в решении задачи 1 мы использовали только то, что они не превосходят ширин этих полос). Следовательно, как ни режь правильный треугольник произвольной прямой на две части, сумма ширин частей будет равна ширине треугольника.

**Упражнение 10.** *Если треугольник не равносторонний, то его можно разрезать прямой на две части, сумма ширин которых больше ширины исходного треугольника.*

**Упражнение 11.** *Из любого ли неравнобедренного треугольника можно вырезать равнобедренный треугольник той же ширины, что и исходный треугольник?*

**Упражнение 12.** *а) Если круг разрезан прямой на две части, то сумма ширин этих частей равна ширине (диаметру) круга. б) Сумма диаметров любых двух кругов, расположенных без пересечения в некотором круге, не превосходит его диаметра.*

**Упражнение 13.** *Квадрат разрезан на две части прямой, не параллельной его сторонам. Докажите, что сумма ширин частей больше ширины (стороны) квадрата.*

### Квадраты

**Задача 2.** *Внутри квадрата разместили два непересекающихся квадрата (рис.9). Докажите, что сумма их сторон не превосходит стороны квадрата.*

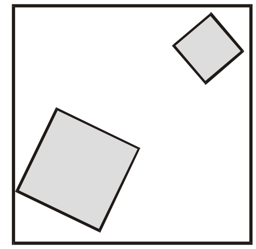

Рис. 9

**Решение.** Проведем разделяющую прямую. Она разрежет квадрат на треугольник и пятиугольник (рис. 10) или на две трапеции (рис. 11)[2]. Достроим эти фигуры до прямоугольных треугольников и поставим задачу:

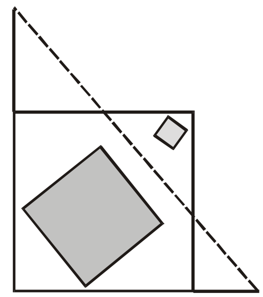

Рис. 10

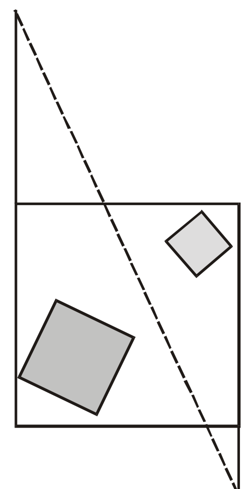

Рис. 11

**Задача 3.** *В данный прямоугольный треугольник вписать квадрат с наибольшей возможной стороной.*

**Решение задачи 3.** Интуитивно ясно[3], что все вершины наибольшего квадрата должны лежать на сторонах треугольника. Таким образом, надо рассмотреть два случая: 1) квадрат

[2] *Возможны еще случаи, когда разделяющая прямая проходит через вершину квадрата. Разберите их самостоятельно.*

[3] *На самом деле это — тема для отдельной заметки, которая будет опубликована позже.*

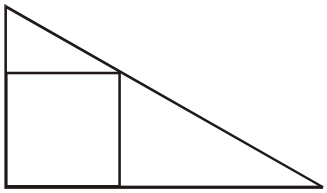

Рис. 12

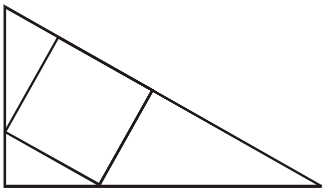

Рис. 13

упирается одним углом в прямой угол треугольника, а противоположным – в гипотенузу (рис. 12); 2) две вершины квадрата лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах (рис. 13).

**Упражнение 14.** *а) Выразите длину стороны квадрата рисунка 12 через катеты a и b рассматриваемого прямоугольного треугольника.*

*б) Выразите длину стороны квадрата рисунка 13 через гипотенузу c и опущенную на нее высоту h.*

*в) Сравните значения выражений – ответов пунктов а) и б).*

Из последнего упражнения получаем ответ задачи 3: наибольший квадрат, вписанный в данный прямоугольный треугольник, изображен на рисунке 12 (одна из диагоналей этого квадрата – биссектриса прямого угла треугольника). Теперь в задаче 2 все ясно: сумма сторон квадратиков достигает наибольшего значения, когда их диагонали составляют диагональ квадрата (рис. 14).

**Упражнение 15*.** *Докажите, что если внутри правильного 2n-угольника лежат два правильных не налегающих друг на друга 2n-угольника, то сумма периметров последних не превосходит периметра объемлющего многоугольника.*

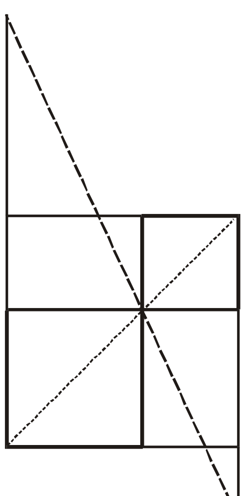

Рис. 14

*Замечание.* Доказывать аналогичное утверждение для правильных многоугольников с нечетным числом сторон мы не умеем.

**Упражнение 16* (M935).** *Если внутри правильного 2n-угольника со стороной a и центром O поместить правильный 2n-угольник, сторона которого больше a/2, то он накроет точку O.*

*Указание.* Если выпуклый многоугольник не содержит точку $O$, то найдется такая его сторона $AB$, что точка $O$ и многоугольник лежат по разные стороны от $AB$. Примените центральную симметрию и результат предыдущего упражнения.

### Гипотеза Эрдёша

До сих пор не решена поставленная более 50 лет назад венгерским математиком Эрдёшем задача: доказать, что для любой расположенной в единичном квадрате системы не налегающих друг на друга $k^2+1$ квадратиков сумма их периметров не превосходит $4k$, т.е. суммы периметров $k^2$ одинаковых квадратиков со стороной $1/k$, на которые можно разбить единичный квадрат.

Например, при $k=3$ гипотеза Эрдёша состоит в том, что расположение 10 квадратиков рисунка 15 дает

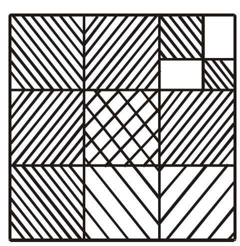

Рис. 15

наибольшую возможную сумму периметров.

**Упражнение 17.** *Как связана задача 2 с гипотезой Эрдёша?*

## Решение задачи M1600

Наивная попытка решения M1600 могла бы состоять в следующем: сумма ширин полос настолько велика, что можно вырезать из каждой полосы по квадрату и потом покрывать такими квадратами единичный круг.

К сожалению, если полосы очень узкие, например, если дана система 1000000 полос с одинаковой шириной $1/10000$, то сумма площадей квадратиков равна

$$1000000\times(1/10000)^2=0{,}01,$$

что гораздо меньше площади единичного круга.

К дню олимпиады мы знали довольно длинное решение. Потом было придумано короткое решение, дающее более точную оценку, так что можете сразу переходить к следующему подразделу.

### «Длинное» решение

Каждой полосе сопоставим перпендикулярный вектор (рис. 16), длина которого равна ширине этой полосы (какое именно из двух возможных направлений придать такому вектору, пока не существенно – следующий абзац все прояснит). Отложим векторы от одной и той же точки $O$ (рис. 17).

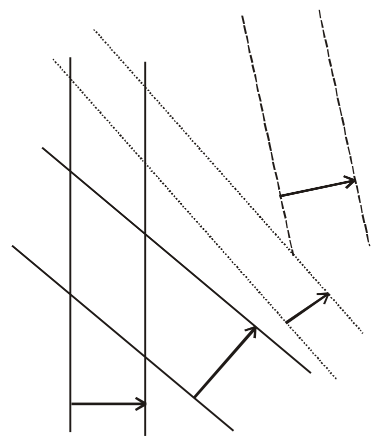

Рис. 16

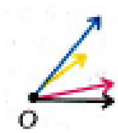


Рис. 17

Разобьем плоскость на 12 углов величиной 30° с вершиной $O$. Объединим каждый из этих углов в пару с вертикальным ему углом. Для каждой из полученных 6 пар вертикальных углов подсчитаем сумму длин векторов, лежащих внутри или на границе этих углов. Хотя бы одна из сумм не меньше 100/6 – в противном случае сумма длин всех векторов была бы меньше 100.

Выберем такую пару вертикальных углов. Заменив, если потребуется, некоторые векторы на противоположные, добьемся, чтобы все они попали в один и тот же угол величиной 30°.

Теперь упорядочим векторы по направлению и, прикладывая начало каждого следующего вектора к концу предыдущего, составим из попавших в угол векторов

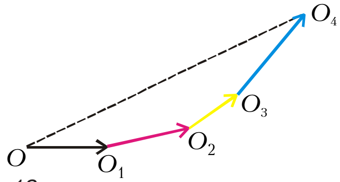


Рис. 18

выпуклую ломаную $OO_1O_2\ldots O_n$ (рис. 18). Длина ее, как уже было сказано, не меньше $100/6$.

Поскольку направления всех векторов $\vec{OO_1}$, $\vec{O_1O_2}$, …, $\vec{O_{n-1}O_n}$ заключены между направлениями векторов $\vec{OO_1}$ и $\vec{O_{n-1}O_n}$, направление суммы $\vec{OO_1} + \vec{O_1O_2} + \ldots + \vec{O_{n-1}O_n} = \vec{OO_n}$ тоже заключено между этими направлениями. Следовательно, $\vec{OO_1}$, $\vec{O_1O_2}$, …, $\vec{O_{n-1}O_n}$ наклонены к вектору $\vec{OO_n}$ под углами, не превосходящими 30°. Поэтому длина $OO_n$ не меньше $(100/6)\cdot\cos 30^\circ = 25/\sqrt{3}$.

Перенесем полосы параллельно так, чтобы концы отрезков $[OO_1]$, $[O_1O_2]$, …, $[O_{n-1}O_n]$ лежали бы на краях перпендикулярных им полос (рис. 19). Обозначим через $M$ пересечение перпендикуляров к отрезкам $[OO_1]$ и $[O_{n-1}O_n]$,

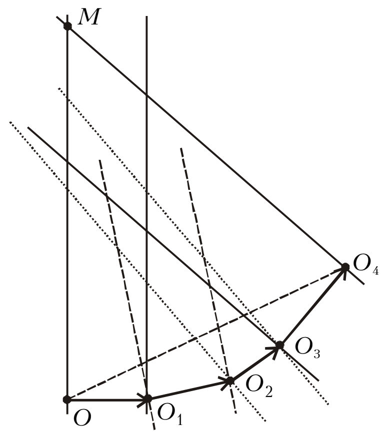


Рис. 19

восставленных в точках $O$ и $O_n$ соответственно.

Индукцией по числу полос легко доказать, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$ полностью покрыт полосами. Поскольку величины углов $MOO_n$ и $MO_nO$ не меньше $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, в треугольнике $MOO_n$ содержится правильный треугольник со стороной $OO_n$, в который, в свою очередь, вписан круг радиусом $OO_n/(2\sqrt{3}) = (25/\sqrt{3})/(2\sqrt{3}) = \frac{25}{6} > 1$.

*Замечание.* Жюри не догадалось использовать индукцию для доказательства того, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$ покрыт полосами. Предполагалось следующее рассуждение.

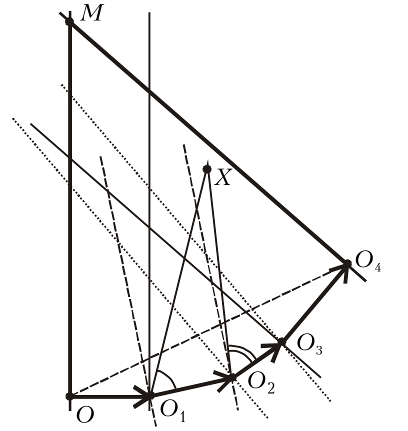


Рис. 20

Рассмотрим любую точку $X$ многоугольника $MOO_1O_2\ldots O_n$. Если перпендикулярная отрезку $[OO_1]$ полоса не покрывает точку $X$, то угол $XO_1O_2$ острый (рис. 20). Если точку $X$ не покрывает и полоса, перпендикулярная отрезку $[O_1O_2]$, то угол $XO_2O_3$ острый. Продолжая в том же духе, мы поймем, что если точка $X$ не покрыта ни одной из первых $n-1$ полос, то все углы $XO_1O_2$, $XO_2O_3$, …, $XO_{n-1}O_n$ острые. Но тогда точка X как раз покрыта полосой, перпендикулярной отрезку $O_{n-1}O_n$!

**Упражнение 18.** *Из точки, расположенной внутри выпуклого многоугольника, опустили перпендикуляры на стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров попал именно на сторону, а не на ее продолжение. (Другими словами, полосы, построенные перпендикулярно сторонам выпуклого многоугольника, покрывают его.)*

*Указание.* Физик сделал бы из данного многоугольника колесо, поместив в интересующую его точку грузик, и позволил бы колесу перекатываться (рис. 21).

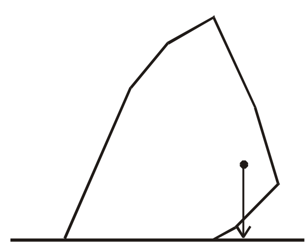

Рис. 21

Математик сделает по сути то же самое, если рассмотрит кратчайшее из расстояний от данной точки до прямых, на которых лежат стороны данного многоугольника.

**Упражнение 19.** *Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров, опущенных из этой точки на плоскости граней, пересекается с соответствующей гранью, а не только с ее плоскостью.*

*Замечание.* Если вам все еще кажется, что утверждение задачи М1600 тривиально для «очень большой» суммарной ширины полос, обдумайте стереометрический вариант:

*В пространстве даны: шар радиуса 1 и несколько «слоев»*[4]*, сумма толщин которых равна 1000000. При любом ли расположении слоев можно каждый из них параллельно перенести так, чтобы они покрыли шар?*

Эта задача – нерешенная проблема, даже если вместо 1000000 написать сколь угодно большое число.

### Более точная оценка

После олимпиады было придумано простое решение задачи М1600. Позже выяснилось, что такое же решение опубликовал в 1984 году американский математик Грёмер.

Рассмотрим систему полос и выпуклую фигуру $F$, граница которой состоит из кривой $AB$ и отрезков $BO$, $OA$. На рисунке 22 полоса $p$ параллельна лучу $OB$, пересечение полосы $q$ с углом $AOB$ неограниченно, а полосы $r$ – ограничено.

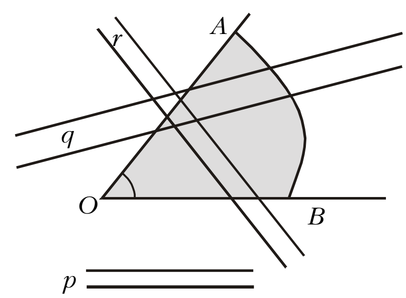


Рис. 22

Пусть в данной системе полос нет полос типа $r$. Другими словами, проведя через вершину $O$ угла прямые параллельно границам полос, потребуем, чтобы все проведенные прямые имели по лучу внутри или на границе угла $AOB$. Докажем, что *если сумма ширин полос больше длины кривой $AB$, то $F$ можно покрыть сдвигами этих полос.*

Для этого упорядочим направления полос по часовой стрелке и возьмем крайнее из них. Перенесем соответствующую полосу так, чтобы одна из ограничивающих ее прямых

[4] Слоем мы называем здесь часть пространства, заключенную между двумя параллельными плоскостями.

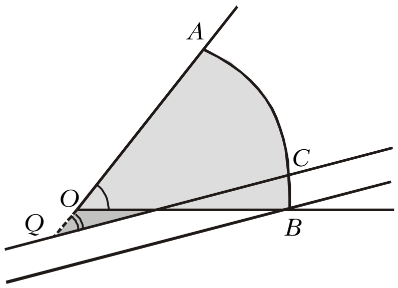


Рис. 23

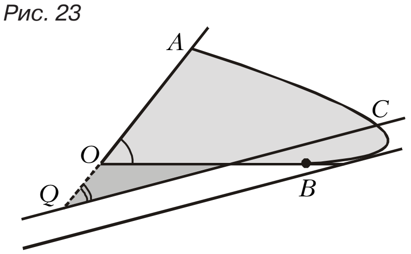


Рис. 24

стала опорной прямой фигуры $F$ (рис. 23, 24). Поскольку от кривой $AB$ будет отрезан кусочек не меньший, чем ширина полосы, то задача будет сведена к покрытию оставшимися полосами фигуры, ограниченной отрезками $AQ$, $QC$ и кривой $CA$.

Решение задачи М1600 теперь очевидно (рис. 25): верхняя полуокружность и два вертикальных отрезка образуют кривую длиной $\pi+2$. Круг радиуса 1 заключен между этой кривой и горизонтальной прямой, которую мы представим как две стороны развернутого угла с вершиной $O$.

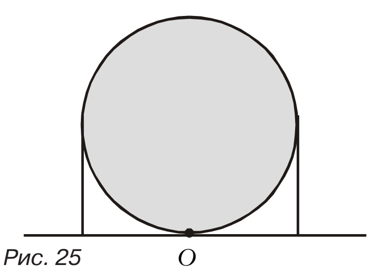


Рис. 25

## Гипотеза о покрытиях

Итак, число 100 в формулировке М1600 можно заменить на $2+\pi$. Было бы интересно выяснить, можно ли заменить его на число $\pi$. Еще интереснее узнать, верна ли следующая гипотеза.

**Гипотеза.** *Любую выпуклую фигуру с периметром $P$ можно покрыть параллельными сдвигами любых полос, сумма ширин которых равна половине периметра фигуры.*

Рассмотрим два частных случая: квадрат и шестиугольник.

### Покрытия квадрата двумя полосами

Квадрат со стороной 1 невозможно покрыть вертикальной и горизонтальной полосами, ширины которых меньше 1 (рис.26).

**Задача 4.** *Если сумма ширин двух полос равна 2, то любой квадрат со стороной 1 можно покрыть параллельными сдвигами этих полос.*

**Решение.** Обозначим большую из ширин полос буквой $w$. Очевидно, $w \geq 1$ – в противном случае сумма ширин рассматриваемых полос была бы меньше 2. Перенесем эту полосу так, чтобы один из ее краев стал опорной прямой квадрата (рис. 27).

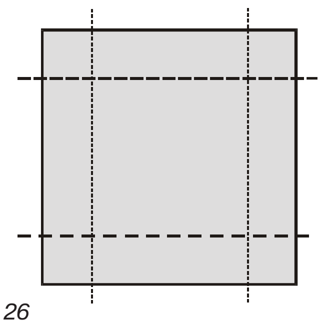

Рис. 26

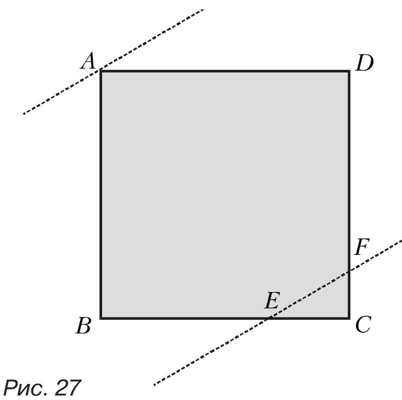


Рис. 27

Докажем, что треугольник $EFC$ можно покрыть второй полосой, т.е. что ширина этого треугольника не превосходит ширины полосы:

$$EF \leq 2 - w. \qquad (*)$$

Рассмотрим $EF$ как функцию от $w$. Легко понять, что эта функция линейная: $EF = kw + b$ при некоторых не зависящих от $w$ величинах $k$ и $b$.

Значит, неравенство $(*)$ достаточно проверить в крайних точках. При $w = 1$ рассмотрим окружность радиусом 1 с центром $A$ (рис. 28). По равенству отрезков касательных, $BE = EK$, $KF = FD$. Следовательно,

$$2EF < (EK + KF) + (EC + CF) =$$
$$= BE + DF + EC + CF = 2,$$

откуда $EF < 1$.

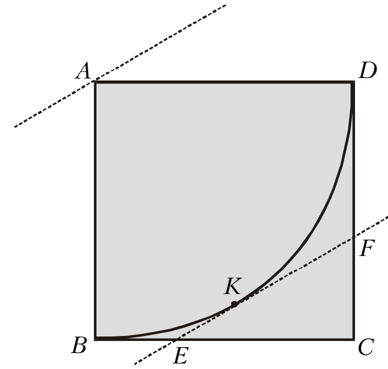


Рис. 28

В другом крайнем случае, когда первая полоса проходит через точку C и целиком покрывает квадрат, $EF = 0$ и неравенство $(*)$ верно.

### Покрытие шестиугольника

Полосы рисунка 29 не покрывают шестиугольник. Тем не менее, его можно покрыть их сдвигами (рис.30). Вообще, пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – выпуклый центрально-симметричный шестиугольник.

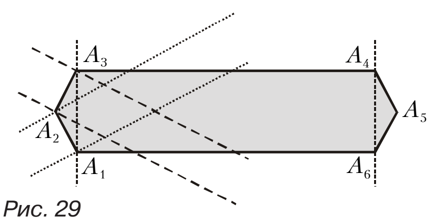


Рис. 29

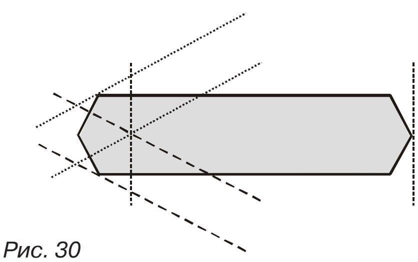

Рис. 30

Оказывается, чтобы покрыть его полосами, образованными перпендикулярами к сторонам $A_1A_2$, $A_2A_3$ и $A_3A_4$, достаточно эти полосы приложить не к «своим» вершинам, а к вершинам $A_3$, $A_1$ и $A_5$ соответственно.

**Упражнение 20.** Докажите это.

*Замечание.* Было бы интересно узнать ответ на следующий частный случай гипотезы: *если через концы каждой стороны выпуклого центрально-симметричного многоугольника $S$ проведем перпендикулярные этой стороне прямые и из каждых двух образовавшихся полос одного направления оставим только одну, то всегда ли $S$ можно покрыть сдвигами полученных полос?*

*(Продолжение следует)*