ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Катушки индуктивности в электрических цепях

В.МОЖАЕВ

ПРЕЖДЕ всего поясним, что имеют в виду, когда говорят о катушке индуктивности. Любой элемент электрической цепи обладает индуктивностью. Например, кусок провода длиной 1 м и диаметром 1 мм в вакууме имеет индуктивность 10^{-6} Гн. Такого порядка индуктивность в реальных электрических цепях существует всегда, и ее обычно называют паразитной индуктивностью. А когда говорят о катушке индуктивности, то подразумевают индуктивность, которая сосредоточена в одном элементе цепи – в катушке – и по величине превосходит паразитную на два и более порядков.

Как правило, катушка индуктивности представляет собой достаточно большое количество витков изолированного провода, намотанного на цилиндрический или тороидальный каркас, причем для увеличения индуктивности каркасы заменяют на магнитные сердечники в виде цилиндров или торов. Витки наматываются в одну сторону, т.е., если через катушку протекает ток, все направления токов в витках совпадают (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

Все реальные катушки индуктивности (кроме сверхпроводящих) обладают омическим сопротивлением, поэтому эквивалентной схемой такой катушки является последовательное соединение идеальной катушки, обладающей чисто индуктивным сопротивлением, и резистора, сопротивление которого равно сопротивлению обмотки. Однако во всехзадачах, разбираемых в этой статье, под катушкой индуктивности будет подразумеваться идеальная индуктивность (чисто реактивный элемент).

Теперь обсудим, какова роль катушки индуктивности, входящей в состав замкнутой электрической цепи. При протекании через катушку постоянного тока она является пассивным элементом, не оказывающим на протекающий ток никакого влияния. Но она была активна тогда, когда происходило установление этого тока, — за это время катушка аккумулировала в себя динамическую энергию носителей тока в виде энергии магнитного поля. При токе через катушку I и ее индуктивности L эта энергия равна $LI^2/2$.

Наиболее интересно ведет себя катушка индуктивности в те моменты, когда происходит изменение протекаемого через нее тока. Изменение тока приводит к изменению магнитного поля внутри катушки, что, в свою очередь, вызывает появление вихревого электрического поля. По правилу Ленца, в моменты нарастания тока напряженность вихревого электрического поля внутри витков катушки направлена против тока, а в моменты уменьшения тока – вдоль тока. Работа, совершаемая вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль всей обмотки катушки, численно равна ЭДС самоиндукции катушки. При постоянной индуктивности катушки ЭДС самоиндукции равна $\mathcal{E}_s = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров поведения катушек индуктивности в электрической цепи.

Задача 1. *В схеме, изображенной на рисунке 1, переключатель П находится в положении «1» (цепь обесточена). Параметры схемы указаны на рисунке, внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. 1) Определите начальные токи через второй резистор (R_2) и катушку индуктивности сразу после перевода переключателя в положение «2». 2) Чему будут равны эти токи после установления стационарного состояния? 3) Какое количество теплоты выделится на втором резисторе при переводе переключателя из положения «2» в положение «3»?*

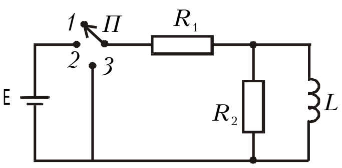

Рис. 1

1) За время замыкания (установление хорошего контакта), которое чрезвычайно мало, появляющийся ток в катушке вызовет ЭДС самоиндукции, которая будет препятствовать возникновению этого тока, поэтому ток в катушке будет равен нулю. С другой стороны, ничто не препятствует установлению тока, который будет протекать через источник и резисторы, при этом ток через резистор сопротивлением R_2 будет равен

$$I_{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

2) Дальше будет происходить следующее. Поскольку в начальный момент ток в катушке равен нулю, но не равна нулю его производная dI/dt, ток в катушке будет нарастать, а ток во втором резисторе – уменьшаться соответственно равенству $LdI/dt = I_{R_2}R_2$. Будет идти переходной процесс. В стационарном состоянии производная dI/dt должна быть равна нулю, следовательно, должен быть равен нулю и ток через второй резистор. Ток в цепи будет теперь течь через первый резистор (R_1) и катушку и будет равен

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

На рисунке 2 изображены графики зависимости токов I_{R_2} и I_L от времени в переходном процессе.

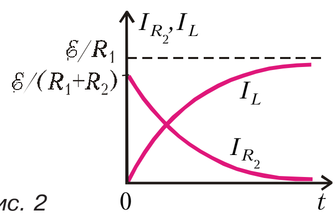

Рис. 2

3) После перевода переключателя в положение «3» в начальный момент в катушке течет ток $I_L = \mathcal{E}/R_1$. Очевидно, что в дальнейшем будет происходить рассеяние (диссипация) энергии, запасенной в катушке. Эта энергия выделится на резисторах в виде тепла:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_1^2}.$$

Поскольку резисторы соединены параллельно,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Из совместного решения последних двух уравнений получим

$$Q_2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_1(R_1 + R_2)}.$$

Задача 2. *В схеме на рисунке 3 ЭДС батареи $\mathcal{E}$, сопротивление резистора R, индуктивности катушек L_1 и L_2, оба ключа разомкнуты и цепь обесточена. Сначала замыкают ключ K_1, а через некоторое время, когда ток через резистор достигает значения I_0, замыкают ключ K_2. Определите установившиеся значения токов через катушки. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.*

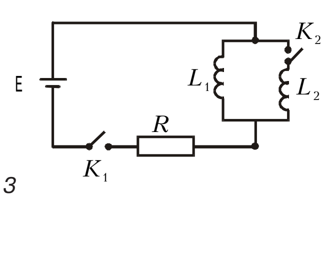

Рис. 3

В качестве отсчета времени выберем момент замыкания ключа K_2. Сразу после замыкания начальные токи в катушках равны $I_{10} = I_0$ и $I_{20} = 0$ соответственно. Поскольку катушки соединены параллельно, для произвольного момента времени t, полагая, что токи в катушках текут в одном направлении, можно записать

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left(L_1I_1 - L_2I_2\right) = 0,$$

откуда следует

$$L_1I_1 - L_2I_2 = \text{const}.$$

Из начальных условий найдем, что константа эта равна L_1I_0, следовательно, для любого момента времени (после замыкания ключа K_2) токи I_1 и I_2 в катушках связаны соотношением

$$L_1I_1 - L_2I_2 = L_1I_0. \qquad (1)$$

После установления стационарного состояния катушки становятся пассивными элементами, ЭДС самоиндукции в каждой из них равна нулю. Обозначим установившиеся токи через $I_{1у}$ и $I_{2у}$. На основании закона Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E} = \left(I_{1у} + I_{2у}\right)R. \qquad (2)$$

Соотношение (1) справедливо для любого момента времени $t > 0$, следовательно, оно справедливо и для момента установления стационарного состояния:

$$L_1I_{1у} - L_2I_{2у} = L_1I_0. \qquad (3)$$

Совместное решение уравнений (2) и (3) позволяет найти $I_{1у}$ и $I_{2у}$:

$$I_{1у} = \frac{L_1I_0 + L_2\mathcal{E}/R}{L_1 + L_2},$$

$$I_{2у} = \frac{L_1\left(\mathcal{E}/R - I_0\right)}{L_1 + L_2}.$$

Задача 3. *На рисунке 4 изображена цепь, в которой в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор (R) сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС первой батареи $\mathcal{E}_1$ = 10 В, внутренние сопротивления батарей r_1 = 5 Ом и r_2 = 20 Ом, сопротивление резистора R = 4 Ом.*

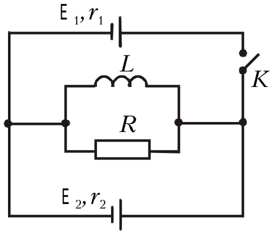

Рис. 4

До замыкания ключа через катушку течет ток $I_L = \mathcal{E}_2/r_2$, а ток через резистор равен нулю. Сразу после замыкания ключа ток через катушку остается неизменным. Если в этот момент через батареи текут токи I_1 и I_2 (рис.5), то

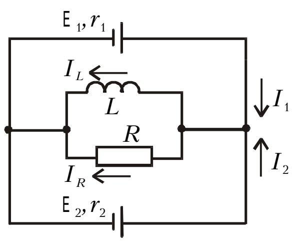

Рис. 5

ток через резистор, очевидно, будет равен

$$I_R = I_1 + I_2 - I_L .$$

На основании закона Ома (точнее – второго правила Кирхгофа) для двух контуров, охватывающих батарею и резистор, можно записать

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + \left(I_1 + I_2 - I_L\right)R,$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + \left(I_1 + I_2 - I_L\right)R.$$

Умножив первое уравнение на r_2, а второе на r_1 и сложив левые и правые части уравнений, получим

$$\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1 =$$
$$= \left(I_1 + I_2\right)\left(R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2\right) - I_L R\left(r_1 + r_2\right).$$

Используя выражение для I_L, найдем суммарный ток:

$$I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2}{R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2},$$

а также ток через резистор:

$$I_R = \frac{\mathcal{E}_1 r_2}{R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2} = 1 \text{ А}.$$

Поскольку мы получили положительное значение тока I_R, выбранное направление тока (см. рис.5) соответствует действительности.

Задача 4. *Электрическая цепь (рис.6) состоит из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, резистора сопротивлением R и катушки переменной индуктивности, начальное значение которой L_0. Через некоторое время после замыкания ключа K ЭДС самоиндукции в катушке равна $\mathcal{E}_0$. Начиная с этого момента, индуктивность катушки изменяют таким образом, что ЭДС самоиндукции остается постоянной и равной $\mathcal{E}_0$. 1) Определите ЭДС самоиндукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость изменяющейся индуктивности катушки от времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.*

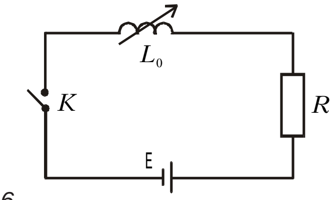

Рис. 6

1) Сразу после замыкания ключа начальный ток в цепи равен нулю, поэтому ЭДС самоиндукции равна ЭДС батареи, взятой с обратным знаком: $\mathcal{E}_s = -\mathcal{E}$.

2) Выберем за начало отсчета времени момент, когда ЭДС самоиндукции в катушке достигает значения $\mathcal{E}_0$, и рассмотрим произвольный момент времени t в этой системе отсчета. На основании закона Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = IR,$$

где I – сила тока в цепи в данный момент времени. Из этого уравнения следует, что ток в цепи, начиная с момента $t = 0$, будет оставаться постоянным и равным

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{R}.$$

Следовательно, при $t > 0$ ЭДС самоиндукции будет определяться выражением

$$I\frac{dL}{dt} = \mathcal{E}_0 .$$

Отсюда получаем

$$L = L_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{I}t,$$

или, после подстановки выражения для тока,

$$L = L_0 + \frac{Rt}{\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 - 1}.$$

Задача 5. *В колебательном контуре (рис.7) конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения. После замыкания ключа K в контуре происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_{2m}. Когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения, из нее быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в μ раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях в контуре после выдвижения сердечника.*

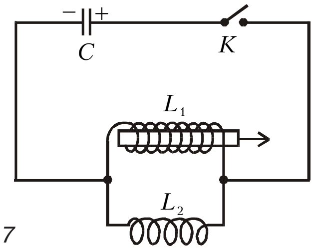

Рис. 7

В любой момент времени после замыкания ключа ЭДС самоиндукции катушек между собой равны:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt},$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие соответствующие катушки. В интегральной форме это равенство имеет вид

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}.$$

Поскольку сразу после замыкания ключа $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, константа также равна нулю. Следовательно, в любой момент времени после замыкания ключа $\Phi_1 = \Phi_2$. Пока индуктивности катушек остаются неизменными, последнее равенство можно записать в виде $L_1 I_1 = L_2 I_2$, где I_1 и I_2 — токи в катушках. В тот момент, когда ток во второй катушке достигает максимального значения I_{2m}, ток в первой катушке будет также максимален и равен $I_{2m}L_2/L_1$.

После быстрого выдвижения сердечника магнитные потоки в катушках сохраняются. Для первой катушки это условие запишем так:

$$L_1 I_{1m} = \frac{L_1}{\mu} I'_{1m},$$

откуда найдем новый ток в катушке:

$$I'_{1m} = \mu I_{1m} = \frac{\mu L_2}{L_1} I_{2m}.$$

Сохранение магнитного потока для второй катушки означает сохранение тока в ней: $I'_{2m} = I_{2m}$.

Суммарная энергия магнитного поля катушек равна

$$W = \frac{L_1}{\mu}\frac{\left(I'_{1m}\right)^2}{2} + \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} =$$
$$= \frac{L_2\left(L_1 + \mu L_2\right)}{2L_1} I_{2m}^2 .$$

По закону сохранения энергии, энергия магнитного поля катушек будет полностью перекачиваться в энергию электрического поля конденсатора:

$$\frac{L_2\left(L_1+\mu L_2\right)}{2L_1}I_{2m}^2=\frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальное напряжение на конденсаторе:

$$U_m=I_{2m}\sqrt{\frac{L_2\left(L_1+\mu L_2\right)}{L_1C}}.$$

Задача 6. *Для подзарядки автомобильного аккумулятора с ЭДС* $\mathcal{E}$ = *= 12 В от источника постоянного напряжения* U_0 *= 5 В собрана схема*

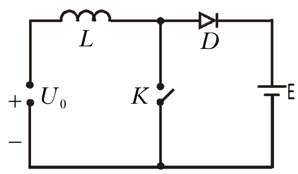

Рис. 8

(рис.8), содержащая катушку индуктивностью L = 0,1 Гн, идеальный диод D и прерыватель K, который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени τ_1 = *=* τ_2 *= 0,1 с. За какое время можно таким образом осуществить подзарядку аккумулятора на q = 0,1 ампер-часов? Омическими потерями пренебречь.*

В начальный момент времени ключ K разомкнут и цепь обесточена. После замыкания переключателя в цепи, содержащей источник постоянного напряжения, катушку и ключ, начнет нарастать ток. Согласно закону Ома, для данной цепи можно записать

$$U_0-L\frac{dI}{dt}=0.$$

Поскольку начальный ток равен нулю, зависимость тока от времени имет вид

$$I(t)=\frac{U_0}{L}t.$$

Через время τ_1 ток в катушке станет равным $I\left(\tau_1\right)=U_0\tau_1/L$.

После размыкания ключа начинается процесс подзарядки аккумулятора. Закон Ома для новой замкнутой цепи запишется в виде

$$U_0-\mathcal{E}-L\frac{dI}{dt}=0,$$

или

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{\mathcal{E}-U_0}{L}.$$

В этом режиме ток линейно спадает со временем по закону

$$I(t)=\frac{U_0}{L}\tau_1-\frac{\left(\mathcal{E}-U_0\right)t}{L}.$$

Через время $t_0=U_0\tau_1/\left(\mathcal{E}-U_0\right)$ ток в цепи упадет до нуля. Так как $\tau_2=\tau_1>$ $>t_0$, ток действительно прекратится и оставшееся время цепь будет обесточена, а после замыкания ключа все будет снова повторяться.

На рисунке 9 показана периодическая зависимость тока через катушку от

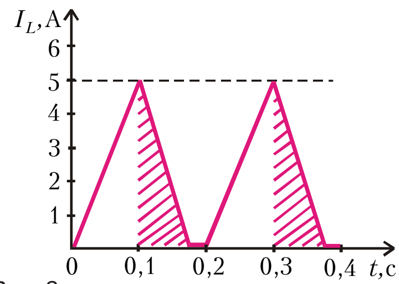

Рис. 9

времени. Заштрихованные участки соответствуют процессу подзарядки. Каждый цикл подзарядки протекает за время $t_3=\tau_1+\tau_2$, а заряд Δq, поступающий при этом в аккумулятор, равен заштрихованной площади:

$$\Delta q=\frac{1}{2}I_L\left(\tau_1\right)t_0=\frac{U_0^2\tau_1^2}{2L\left(\mathcal{E}-U_0\right)}.$$

Количество циклов N определяется отношением

$$N=\frac{q}{\Delta q}=\frac{2qL\left(\mathcal{E}-U_0\right)}{U_0^2\tau_1^2}.$$

Тогда полное время подзарядки равно

$$T=N\left(\tau_1+\tau_2\right)=$$

$$=\frac{2qL\left(\mathcal{E}-U_0\right)\left(\tau_1+\tau_2\right)}{U_0^2\tau_1^2}=22{,}4\ \text{часа}.$$

Упражнения

1. Какое количество теплоты выделится в схеме на рисунке 10 после размыкания ключа K? Параметры схемы указаны на

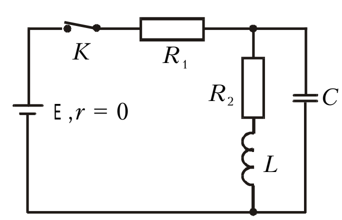

Рис. 10

рисунке.

2. В схеме, изображенной на рисунке 11, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС второй батареи $\mathcal{E}_2$ = 10 В, ее внутреннее сопро-

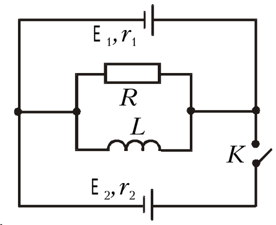

Рис. 11

тивление r_2 = 20 Ом, внутреннее сопротивление первой батареи r_1 = 5 Ом, сопротивление резистора R = 4 Ом.

3. Электрическая цепь (рис.12) включает в себя батарею с ЭДС $\mathcal{E}$, катушку индуктивностью L и переменное сопротивление, начальное значение которого равно R_0. Через

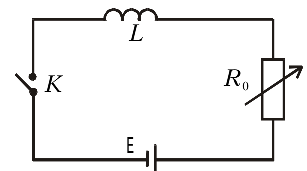

Рис. 12

некоторое время после замыкания ключа K ЭДС самоиндукции в катушке равна $\mathcal{E}_0$. Начиная с этого момента, переменное сопротивление изменяют таким образом, что ЭДС самоиндукции в катушке остается постоянной и равной $\mathcal{E}_0$. 1) Определите ЭДС самоиндукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость изменяющегося сопротивления от времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора емкостью C (рис.13), происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда колебаний тока равна I_0. Когда сила тока в первой катушке максимальна, в нее быстро

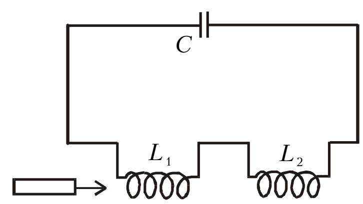

Рис. 13

(за время, малое по сравнению с периодом колебаний) вставляют сердечник, который приводит к увеличению ее индуктивности в μ раз. Определите максимальное напряжение на конденсаторе: 1) до вставки сердечника; 2) после вставки сердечника.