ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ»

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Конечно же, его зовут Сергеем.

2. Обозначим длину каната через $2L$, тогда в прямоугольном треугольнике ABC (рис.1) гипотенуза равна $L + 20$ см, а катеты – L и 100 см. Из уравнения $(L+20)^2 = L^2 + 100^2$ получаем, что $L = 240$ см, и длина каната равна 4 м 80 см.

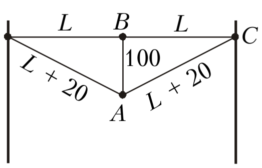


Рис. 1

3. Если мы сложим уравнения системы, то получим $10000x + 10000y = 90000$, или $x + y = 9$. Если вычтем из первого уравнения второе, то получим $5124x - 5124y = 5124$, или $x - y = 1$. Теперь очевидно, что $x = 5$, $y = 4$.

4. Пусть каждый юноша знаком с k девушками, тогда всего будет $9k$ знакомств. Так как все девушки знакомы с разным количеством юношей, то это может быть лишь в случае, если одна знакома со всеми девятью, другая – с восемью, и т.д., десятая – не знакома ни с кем. Поэтому число знакомств равно $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Значит, $9k = 45$ и $k = 5$. Нетрудно нарисовать схему знакомств, указанную в задаче (рис.2). Здесь знаком «+» отметены знакомые юноша и девушка с номерами, указанными по горизонтали и по вертикали соответственно.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			+	+	+	+					+
2				+	+	+				+	+
3					+	+			+	+	+
4						+		+	+	+	+
5							+	+	+	+	+
6							+	+	+	+	+
7							+	+	+	+	+
8							+	+	+	+	+
9							+	+	+	+	+

Рис. 2

5. Составим таблицу числа рабочих дней в первой и второй декадах месяца в зависимости от дня недели, с которого начинается месяц:

I декада		II декада	
Понедельник	8	Четверг	7
Вторник	8	Пятница	6
Среда	8	Суббота	6
Четверг	7	Воскресенье	7
Пятница	6	Понедельник	8
Суббота	6	Вторник	8
Воскресенье	7	Среда	8

Из нее видно, что равное количество рабочих дней (7) в I и II декадах может быть лишь в случае, если месяц начинается с четверга. Но тогда декада начнется со среды, и в ней будет разное количество рабочих дней в зависимости от числа дней в месяце. Если в месяце 30 дней, то в третьей декаде 8 рабочих дней. 8 рабочих дней будет и в случае 31 дня в месяце. Но есть еще февраль, в котором 28 или 29 дней. При 28 днях в третьей декаде будет 6 рабочих дней, а при 29 днях, т.е. в високосный год, – 7 рабочих дней, именно то, что требуется. Несложно определить, что первое февраля високосного года было четвергом в 1996 году, и ранее через 28 лет: 1968, 1940, 1912 и т.д. Но в 1968 и 1940 годах не было Городских Дум, а были Советы, а в 1912 и ранее не было в городах троллейбусов.

Таким образом, правильный ответ – февраль 1996 года.

КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1. $Q = \dfrac{\mathcal{E}^2\left(L + CR_2^2\right)}{2\left(R_1 + R_2\right)^2}$.

2. $I_R = \dfrac{\mathcal{E}_2 r_1}{R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2} = 0{,}25$ А; ток течет справа налево.

3. 1) $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}$; 2) $R(t) = \dfrac{R_0}{1 + \dfrac{R_0 \mathcal{E}_0 t}{L\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0\right)}}$.

4. 1) $U_{m1} = I_0 \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{C}}$;

2) $U_{m2} = I_0\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{\dfrac{1}{C\left(\mu L_1 + L_2\right)}}$.

LXI МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Городская олимпиада

6 КЛАСС

1. 432 части.

2. Да, сможет.

3. Числа нужно расположить по кругу, например, в следующем порядке: 1, 4, 5, 8, 9, 2, 3, 6, 7, 10.

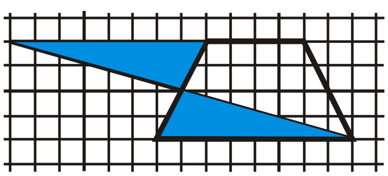


Рис. 3

4. См. рис.3.

5. Расстояние от B до C равно 10 км (рис.4). Бензоколонки A и C разбивают кольцевую дорогу на две дуги. Если бы бензоколонка D находилась на меньшей дуге, то сумма расстояний от A до D и от D до C была бы равна расстоянию от A до C. Но это не так. Значит, бензоколонка D расположена на большей дуге, поэтому длина большей дуги равна 25 + 35 = 60 км (убедитесь в этом сами!). Следовательно, длина дороги 100 км.

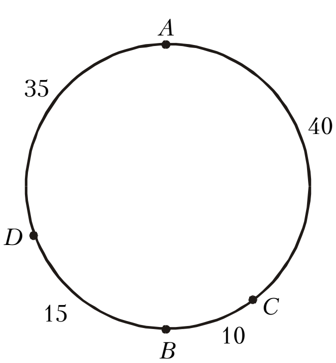


Рис. 4

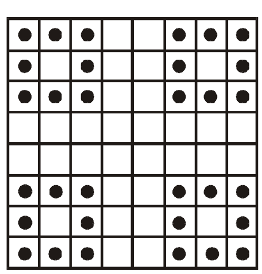


Рис. 5

Теперь ясно, что бензоколонки B и A диаметрально противоположны. Значит, расстояние от B до C равно 50 – 40 = = 10 км.

6. а) Да, $5/7 - 12/17 = 1/119 < 0{,}01$. б) Нет. Приводя разность дробей к общему знаменателю, получим в числителе целое число, не равное нулю, а в знаменателе 119. Поэтому дроби отличаются не меньше чем на $1/119 > 0{,}005$.

7. См. рис.5.

7 КЛАСС

2. 40%.

4. Нет, не может. Ясно, что если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов – четное число, а во втором и тех, и других – нечетное число. Значит, число людей на острове обязательно четно.

5. 6 фартингов. Нетрудно построить пример, когда покупка стоит 6 фартингов: Незнайка заплатил две монеты – 1 фартинг и 50 фартингов, а сдачу получил тремя монетами по 15 фартингов.

Докажем, что покупка не могла стоить меньше 6 фартингов. Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Незнайка отдал k монет, тогда остаток от деления этой суммы на 7 равен остатку от деления k на 7. Остаток от деления на 7 сдачи равен остатку от деления $k + 1$ на 7. Из

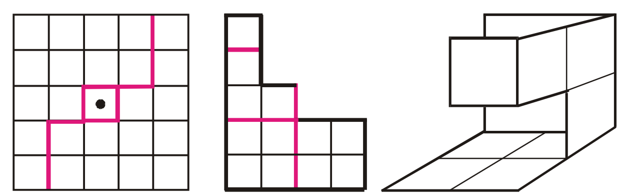


Рис. 6

этого следует, что остаток от деления на 7 стоимости покупки равен 6. Но 6 – наименьшее из натуральных чисел с таким свойством.

6. См. рис.6.

8 КЛАСС

1. Да, найдутся. Например, $x = 1$ (февраль), $y = 4$ (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь), $z = 7$ (остальные месяцы года). Или $x = 2$, $y = 1$, $z = 9$.

2. Да, можно. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_8$ – различные простые числа. Тогда числа $p_1^2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_8$; $p_1 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_8$; …; $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_8^2$ являются искомыми.

3. Обозначим через P и Q середины сторон AB и CD соответственно. Средняя линия PQ проходит через точку O, и, если точка M не лежит на отрезке AP, то $\angle MPO = \angle MAD = \angle AMO$. Поэтому треугольник MPO равнобедренный, и $MO = PO$. Но $PO = OQ$, следовательно, в треугольнике PMQ медиана MO равна половине стороны PQ. Значит, треугольник PMQ – прямоугольный, причем сторона MQ перпендикулярна стороне PM. Но сторона PM параллельна CD. Поэтому MQ является серединным перпендикуляром для отрезка CD. Следовательно, $MC = MD$. Случай $M \in AP$ разбирается аналогично.

4. Предположим, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ содержится k синих и, соответственно, $100 - k$ красных. Тогда эти k синих чисел суть числа от 1 до k включительно, а $100 - k$ красных чисел – числа от $k + 1$ до 100 включительно (идущие в обратном порядке).

5. Заметим, что если у человека есть знакомые, сидящие рядом (в частности, если он знаком со своим соседом), то этот человек знаком со всеми. Докажем, что такой гость найдется.

Пусть A и B – двое соседей. Если они не знакомы между собой, то их общий знакомый C знаком со всеми, так как его знакомые сидят без промежутков. В противном случае знаком со всеми человек A (по той же причине).

Итак, пусть X – гость, знакомый со всеми. Тогда его соседи тоже знакомы со всеми, так как они знакомы с X (являющимся для них соседом). Соседи этих соседей также знакомы со всеми, и так далее по кругу в обе стороны.

9 КЛАСС

1. Нет. $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = \left(2^9 + 3^{10}\right)^2$.

2. Проведем третью высоту BS и продлим ее до пересечения с PQ в точке T. Докажем, что площади прямоугольников $ASTQ$ и $AEKL$ равны. Из подобия прямоугольных треугольников ABS и AEC получаем $AE/AC = AS/AB \Leftrightarrow AE \cdot AB = AS \cdot AC \Leftrightarrow AE \cdot AL = AS \cdot AQ$. Аналогично, равны площади прямоугольников $CSTP$ и $CDMN$.

4. Обозначим военные базы числами от 1 до n. Если некоторый набор – стратегический, то при выкидывании всех входящих в него дорог множество баз $\{1, \ldots, n\}$ распадается ровно на две не соединенные друг с другом части, внутри которых все дороги сохранены. Пусть первый стратегический набор разбивает множество $\{1, \ldots, n\}$ на подмножества A и B, а второй – на C и D.

Пусть $K = A \cap C$, $L = A \cap D$, $M = B \cap C$, $N = B \cap D$. Множества K, L, M, N попарно не пересекаются, пустым может быть только одно из них (или ни одного), а объединение этих множеств дает $\{1, \ldots, n\}$.

При закрытии первого стратегического набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и M, K и N, L и M, L и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие множества K с L и M с N. При закрытии второго набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и L, K и N, L и M, M и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие K с M и L с N. Итак, множество дорог, принадлежащих ровно одному стратегическому набору – это все дороги, соединяющие K и L, K и M, L и N, M и N, а также, возможно, некоторые дороги, соединяющие K с N и L с M. Следовательно, при закрытии такого набора дорог множество баз распадется по крайней мере на (непустые) множества $K \cup N$ и $L \cup M$, не соединенные дорогами. Другими словами, мы получим важный набор, что и требовалось доказать.

5. Заметим, что геометрическое место точек O таких, что $\angle AOD = 80°$ и точка O лежит по ту же сторону от AD, что и B – это дуга окружности, проходящей через точки A и D, а множество точек O, для которых $\angle BOC = 100°$, причем точка O лежит по ту же сторону от BC, что и A – это дуга окружности, проходящей через B и C. Точка O должна лежать на пересечении этих двух дуг. Следовательно, таких точек может быть не более двух.

Укажем две точки, удовлетворяющие условиям задачи. Первая точка, O_1, лежит на диагонали AC, причем $\angle BO_1C = 100°$. Тогда, очевидно, $\angle AO_1B = 80°$, и в силу симметрии относительно AC имеем $\angle AO_1D = \angle AO_1B = 80°$, что и требуется в условии. Аналогично, вторая точка, O_2, лежит на диагонали BD, причем $\angle BO_2C = 100°$. В этом случае $\angle AO_2D = 80°$ и $\angle AO_2B = 100°$.

Легко видеть, что эти две точки различны (они лежат на разных диагоналях и отличны от точки пересечения диагоналей P) и обе лежат внутри ромба.

Ответ: 80° или 100°.

6. Координата каждой отмеченной точки удовлетворяет соотношению вида $x = (y + z)/2$, где y и z – координаты других отмеченных точек или концов отрезка. Заменив координаты отмеченных точек переменными, получим систему линейных уравнений с рациональными коэффициентами и свободными членами (будем называть такую систему рациональной).

Предположим, что решение системы не единственно. Сравним то решение, о котором сказано в условии задачи, с каким-либо другим. Назовем *смещением* переменной абсолютную величину разности ее нового и старого значений. Пусть d – наибольшее из смещений переменных, и среди переменных с таким смещением наибольшее значение в первом решении принимает переменная x. Выполнено соотношение $x = (y + z)/2$, где y и z – другие переменные либо концы отрезка. Пусть в первом решении точка y лежит слева от x, а z – справа (по условию все эти точки не совпадают). Ввиду выбора x смещение z меньше d. Но смещение суммы не превосходит суммы смещений. Как следствие, смещение y больше d, что также противоречит выбору x. Поэтому в действительности решение системы единственно.

Задача свелась к доказательству следующего факта: если рациональная система имеет единственное решение, то оно рационально. Докажем это индукцией по числу переменных. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо при всех $1 \le k < n$. Выразим какую-либо переменную через другие из уравнения, в которое она входит с ненулевым коэффициентом. Подставив полученное выражение в остальные уравнения, получим рациональную систему с меньшим числом переменных. Ее решение единственно (иначе решение исходной системы не было бы единственным) и по предположению индукции рационально. Исключенная переменная выражена через остальные также рационально, поэтому рационально и ее значение, что и требовалось.

Замечание. Несовпадение точек в условии задачи существенно. Действительно, если три иррациональных точки отрезка $[0; 1]$ совпадают, то каждая из них лежит посередине между двумя другими.

10 КЛАСС

1. Пусть $a + b + c \le 11$. Тогда $28a + 30b + 31c \le 11 \cdot 31 = 341$. Противоречие. Пусть $a + b + c \ge 13$. Тогда $28a + 30b + 31c \ge 13 \cdot 28 = 364$, причем равенство достигается только в случае $a = 13$, $b = c = 0$. Во всех остальных случаях $28a + 30b + 31c \ge 366$. Противоречие. Остается единственный случай $a + b + c = 12$.

3. *Ответ*: 1998. Занумеруем фонари натуральными числами в порядке следования вдоль дороги. Если отрезки, освещенные n-м и $(n+2)$-м фонарями, пересекаются, то $(n+1)$-й фонарь можно выключить. Следовательно, отрезки с различными нечетными номерами не пересекаются. На отрезке длиной 1000 м нельзя расположить больше 999 непересекающихся отрезков длиной 1 м. Значит, фонарей не больше 1998.

Расположим 1998 фонарей так, чтобы центры освещенных отрезков образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен 0,5 м, а 1998-й равен 999,5 м. Между n-м и $(n+2)$-м отрезком остается зазор в $(1/1997)$ м. Его освещает только $(n+1)$-й фонарь. Поэтому никакой фонарь нельзя выключить.

4. *Ответ*: не существует. Обозначим через $S(X)$ сумму цифр числа X. Из алгоритма сложения в столбик видно, что $S(X + Y) = S(X) + S(Y) - 9P(X,Y)$, где $P(X,Y)$ – число переносов при сложении X и Y в столбик. Отсюда $S(1998X) = S(2000X) - S(2X) + 9P(2X, 1998X) = 9P(2X, 1998X)$, так как $S(2000X) = S(2X)$. Но $P(2X, 1998X) \ge 3$, так как сумма этих чисел имеет на конце на 3 нуля больше, чем каждое из слагаемых.

5. *Ответ*: в отношении 5:7, считая от вершины A. Решим сначала «задачу одного гвоздя». Пусть вбит один гвоздь, касающийся треугольника в точке M на стороне AC. Фиксируем центр предполагаемого вращения (точка O). Можно ли повернуть треугольник вокруг точки O на небольшой угол, и если да, то в какую сторону?

Пусть треугольник расположен так, что при повороте вокруг центра на 60° по часовой стрелке вершина A переходит в вершину B. Проведем перпендикуляр к прямой AC в точке M. Он разобьет плоскость на две полуплоскости. Если точка O лежит в той же полуплоскости, что и C, то вокруг точки O можно повернуть треугольник по часовой стрелке, а если в другой полуплоскости, то против часовой стрелки.

Вернемся к «задаче трех гвоздей». Проведем три соответствующих перпендикуляра. Докажем, что если они не пересекаются в одной точке, то треугольник можно повернуть. Действительно, перпендикуляры разбили плоскость на семь областей. Сопоставим каждой области строку из трех символов типа + или −. Первый плюс означает, что гвоздь на стороне AB не препятствует вращению треугольника вокруг точек этой области по часовой стрелке и т.д. Разным областям не могут соответствовать одинаковые строки. Всех возможных строк восемь. Поэтому наверняка встретится или строка +++, или строка − − −.

Итак, перпендикуляры пересекаются в одной точке. Точки, где вбиты гвозди на сторонах AB, BC и AC, обозначим соответственно через D, E и F. Пусть перпендикуляр к AB в точке D пересекает AC в точке K, перпендикуляр к BC в точке E пересекает AC в точке H, и эти перпендикуляры пересекаются в точке R. Тогда $AK = AD/\cos 60^\circ = AC/2$ и $CH = CE/\cos 60^\circ = 2/3AC$. Треугольник HRK равнобедренный, поскольку углы HKR и KHR равны 30°. Отсюда $HF = FK$ и F делит сторону AC в отношении 5:7, считая от вершины A.

11 КЛАСС

1. Заметим, что

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(2z-1).$$

Если левая часть равенства равна нулю, то хотя бы один множитель справа равен нулю.

2. Нет, не следует. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x \le 1; \\ 1/x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

3. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим равносторонний треугольник APQ, для которого отрезок AK является медианой, а точка P лежит на прямой AB. Так как точка пересечения медиан всегда делит медианы в отношении 2:1, точка M является точкой пересечения медиан, т.е. центром треугольника APQ. Значит, $\angle KPM = 30^\circ = \angle KBM$. Следовательно, точки M, K, P, B лежат на одной окружности. Так как угол $\angle MKP$ прямой, MP − диаметр этой окружности. Эта окружность пересекает AP ровно в двух точках, одна из которых P, а другая, B, − середина AP.

Пусть сторона треугольника APQ равна $2a$. Имеем: $AB = a$, $AK = \sqrt{3}a$. Треугольник BKP − равносторонний, $BK = a = KC$ и $BC = 2a$. Далее, $\angle ABK = 120^\circ$, откуда по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos 120^\circ = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2$. Наконец, находим $\cos\angle ACB = (4 + 7 - 1)\big/\left(2 \cdot 2\sqrt{7}\right) = 5\big/\left(2\sqrt{7}\right)$ и $\cos\angle CAB = (7 + 1 - 4)\big/\left(2\sqrt{7}\right) = 2/\sqrt{7}$.

4. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т.е. 1. Поэтому z − четное число. Аналогично, левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число x тоже четное. Обозначив $z = 2t$, имеем $5^t - 2^y = 3^u$, $5^t + 2^y = 3^v$. Поэтому $u = 0$, $v = x = 2k$. Значит, $1 + 2^{y+1} = 3^{2k}$, откуда $\left(3^k + 1\right)\left(3^k - 1\right) = 2^{y+1}$. Получили $3^k + 1 = 2^m$, $3^k - 1 = 2^n$, $2^m - 2^n = 2$. Отсюда $n = 1$, $k = 1$, $y = 2$, $x = 2k = 2$, $z = 2$.

5. Число 61 нечетное, поэтому на плоскости такая система шестеренок вращаться не сможет: если одна из шестеренок вращается по часовой стрелке, ее соседи должны вращаться против часовой стрелки, и наоборот. Однако в пространстве

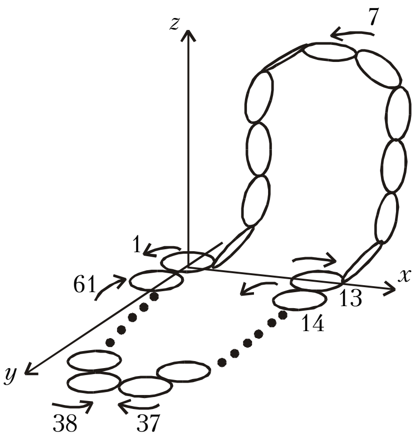


Рис. 7

требуемая конструкция возможна − см. рис.7.

Плоскости шестеренок 1—13 перпендикулярны координатной плоскости Oxz; шестеренки 13—61 и 1 содержатся в плоскости Oxy. При этом шестеренки 13, 15, 17, ..., 61 вращаются по часовой стрелке (если смотреть на плоскость Oxy сверху), а шестеренки 14, 16, ..., 60, 1 − против часовой стрелки. На участке 1—13 этой цепочки происходит перемена четности номеров шестеренок, вращающихся в плоскости Oxy в одну сторону: шестеренки 1 и 13 вращаются в разных направлениях.

Комментарий. Встретившийся в этой задаче объект называется лентой Мёбиуса.

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. *Первое решение.* Пусть $P(x) = a_k x^k + a_m x^m + \ldots$, где $k > m \ge 0$. Тогда $P(P(x)) = a_k\left(a_k x^k + a_m x^m + \ldots\right)^k + a_m\left(a_k x^k + a_m x^m + \ldots\right)^m + \ldots$ При раскрытии первой скобки получаются степени $k^2 > k(k-1) + m > \ldots$ Старшая степень второй скобки равна km. Но $k(k-1) + m > km$ при $k > 1$. В этом случае $k(k-1) + m > 0$. Получили: $k = 1$, $n = 1$. Легко видеть, что $P(x) = x - \frac{1}{2}$.

Второе решение. Обозначим $Q = P'$, тогда $Q(x)Q(P) = nx^{n-1}$. Значит, $Q(x)$ одночлен: $Q(x) = a_k x^k$. $Q(P(x))$ также одночлен. При $k > 0$ это означает, что $P(x)$ − одночлен. Противоречие. Получили: $P(x) = ax + b$, $n = 1$.

2. Перепишем уравнение: $(x - a)(y - a) = a^2$, где $x \neq 0$. Число целых решений этого уравнения имеет вид $4k + 1 \neq 99$.

3. Занумеруем школьников в порядке очереди в первый день. Пусть их всего n. Пусть k − номер школьника, игравшего с последним в первый день. Тогда он играл со школьниками с номерами от $k + 1$ до n. Ясно, что во второй день он также играл с кем-то из них.

4. *Лемма.* Если x_1, x_2, x_3 − корни $x^3 + px + q$, p, $q \in \mathbf{Q}$, x_1, x_2, $x_3 \,\overline{\in}\, \mathbf{Q}$, то $ax_1 + bx_2 + cx_3 \neq 1$ при a, b, $c \in \mathbf{Q}$.

Доказательство. Пусть $x_1 \neq x_2$, $Ax_1 + Bx_2 = 1$, $A, B \in \mathbf{Q}$, $A \neq 0$.

$$P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2)\left(\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) + p\right) = 0.$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1 > 0.$$

Значит, x_2 – корень многочлена P_2 с рациональными коэффициентами.

Получили: $P(x) = P_2(x)(x-\alpha)$, где $\alpha \in \mathbf{Q}$. Противоречие.

Решение задачи. $\cos 20°$, $-\cos 40°$, $-\cos 80°$ – корни уравнения $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$. Достаточно доказать, что $P(y) = y^3 - 3y - 1$ не имеет рациональных корней. Но такими корнями могли бы быть лишь числа ± 1.

5. Пусть $g(x) = x - f(x)$. Тогда условие $f(x) = x + f(x - f(x))$ можно, перенеся x налево, записать в виде $-g(x) = f(g(x))$. Заметим, что:

1) $g(x)$ – непрерывная функция от x;
2) $g(0) = 0$;
3) $g(g(x)) = g(x) - f(g(x)) = 2g(x)$.

Таким образом, если функция g принимает какое-то положительное значение, то она принимает сколь угодно большие положительные значения; аналогично – с отрицательными значениями. Но поскольку $g(x)$ непрерывна, если она принимает значения a и b, то она принимает все значения между a и b.

Таким образом, возможны только 4 случая:

1) $g(x) = 0$ для всех x;
2) $g(x)$ принимает все неотрицательные значения, и только их;
3) $g(x)$ принимает все неположительные значения, и только их;
4) $g(x)$ принимает все значения.

Случай 1. $\forall x\ g(x) = x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x\ f(x) = x$.

Случай 2. Поскольку всякое $x \ge 0$ представимо в виде $x = g(y)$, то $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$; для $x < 0$ имеем $g(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \le x$. Убедимся, что все такие непрерывные функции подходят. Если $x \ge 0$, то $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(2x) + x + x = 0$. Если $x < 0$, то $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(x) - x + x - f(x) = 0$, поскольку $x - f(x) \ge 0$.

Случай 3. Аналогично случаю 2, получаем все непрерывные функции, для которых $f(x) = -x$ при $x \le 0$, $f(x) \ge x$ при $x > 0$.

Случай 4. Все x представимы в виде $x = g(y)$, тогда $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$.

6. Решение опирается на два следующих утверждения.

Лемма 1. В описанном четырехугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, проходят через точку пересечения диагоналей.

Лемма 2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ касательные к описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой PQ, проходящей через точки пересечения противоположных сторон четырехугольника.

Обе леммы можно доказать, спроектировав точку пересечения диагоналей четырехугольника в центр окружности или рассматривая четырехугольник как вырожденный шестиугольник и применяя теоремы Брианшона и Паскаля. (Доказательство этих лемм можно найти, например, в статье А.Заславского «Некоторые факты проективной геометрии», опубликованной в «Кванте» №1 за 1996 год.)

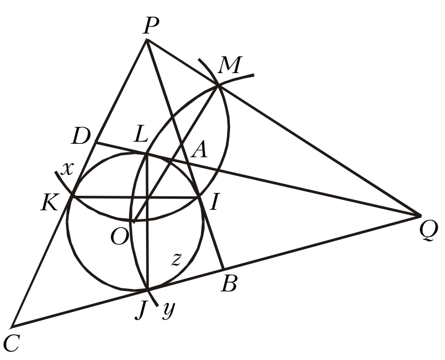


Рис. 8

Пусть теперь $ABCD$ – описанный четырехугольник, I, J, K, L – точки касания вписанной окружности z со сторонами AB, BC, CD, DA, P – точка пересечения AB и CD, Q – точка пересечения AD и BC, M – основание перпендикуляра, опущенного из O на PQ (рис.8).

Построим на отрезках OP, OQ как на диаметрах окружности x, y. Точки M, I, K лежат на окружности x, так как соответствующие углы прямые. Аналогично L, J, M лежат на y. Прямые LJ, KI, OM являются общими хордами окружностей y и z, x и z, x и y соответственно. Следовательно, они пересекаются в одной точке, которая по лемме 1 совпадает с точкой пересечения диагоналей $ABCD$.

Мы доказали утверждение а).

Для доказательства утверждения б) заметим, что углы OMK и OMI равны, так как равны соответствующие дуги окружности x. Аналогично равны углы OML и OMJ. Поэтому при симметрии относительно OM точки I, J перейдут в точки I', J', лежащие на прямых MK, ML соответственно. Точка B перейдет в точку B' пересечения касательных к окружности в точках I', J'. При этом точки M, B', D лежат на одной прямой по лемме 2. Следовательно, углы BMO и DMO равны (заметим, что углы AMO и CMO также равны).

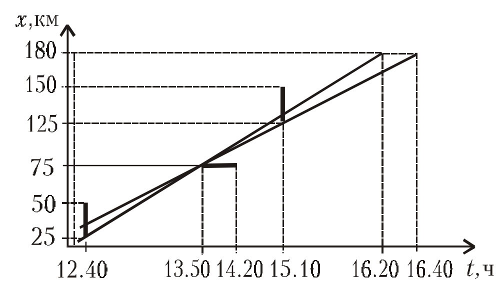
Примечание. Утверждение а) сразу следует из того, что прямая PQ является полярой точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

8 КЛАСС

1. Эту задачу проще всего решать графически (рис.9). Нарисуем прямоугольную систему координат «положение автомобиля – время» $(x-t)$ и отметим на этом чертеже последовательные положения автомобиля настолько точно, насколько

Рис. 9



это позволяет условие задачи. Мы знаем, что в 12 ч 40 мин координата автомобиля удовлетворяла неравенству $25 < x < 50$, т.е. положение автомобиля в указанный момент времени изображается на чертеже вертикальным отрезком. Аналогичными отрезками изображаются и два других положения автомобиля, о которых идет речь в условии. Известно, что при равномерном движении зависимость координаты от времени изображается прямой линией. Значит, для того чтобы получить ответ, нужно провести две прямые линии так, чтобы они обе проходили через нарисованные на чертеже отрезки, но при этом одна из них должна иметь максимально возможный наклон, а вторая – минимально возможный наклон. Эти прямые отсекут на горизонтальной линии, соответствующей координате $x = 180$ км, отрезок, который и даст нам искомый интервал времени. Из рисунка видно, что прибытия автомобиля в Борискино можно ожидать примерно с 16 ч 20 мин до 16 ч 40 мин.

2. Нужно сделать пять переливаний. *Указание.* С помощью уравнения теплового баланса находим, что разность температур после первого переливания туда-обратно составит 6 °С, после второго – 3,6 °С, после третьего – 2,16 °С, после четвертого – 1,296 °С, после пятого – 0,7776 °С. Значит, достаточно пяти переливаний.

9 КЛАСС

1. После удара верхнего бруска о стену его скорость изменится на противоположную по направлению, сохранив свой модуль, а скорость нижнего бруска не изменится. Затем бруски начнут двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю начальными скоростями и равными по модулю, но противоположно направленными ускорениями. Из-за этого скорости брусков будут уменьшаться, все время оставаясь равными друг другу. В результате нижний брусок либо не достигнет стены, либо все же ударится о нее, имея некоторую скорость u. В первом случае оба бруска останутся стоять неподвижно на некотором расстоянии от стены. Во втором случае нижний брусок, ударившись о стену, поменяет направление своей скорости на противоположное, в результате чего проскальзывание между брусками прекратится и оба бруска продолжат движение со скоростью, равной u, в направлении от стены. Рассмотрим отдельно оба случая.

Поместим начало координатной оси X в угол между стеной и полом и направим ее в сторону первоначального движения брусков. Ясно, что после первого удара сила трения между брусками составляет $F_{\text{тр}} = \mu Mg$, ускорение нижнего и верхнего брусков по модулю равно $F_{\text{тр}}/M = \mu g$. Тогда закон движения передней грани нижнего бруска имеет вид

$$x = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2},$$

а его скорость изменяется по закону

$$v = v_0 - \mu g t,$$

при этом время отсчитывается от момента удара верхнего бруска о стену. Найдем условие на скорость v_0, при которой нижний брусок не доедет до стены (не достигнет координаты $x = 0$). Оно получается из неравенства

$$x = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2} < 0.$$

Решая его, находим, что дискриминант квадратного трехчлена, содержащегося в неравенстве, отрицателен при

$$v_0^2 < 2a\mu g.$$

Это и есть искомое условие. Время, через которое нижний брусок остановится, можно определить, приравняв скорость v нулю:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g}.$$

Значит, при $v_0^2 < 2a\mu g$ оба бруска в конце концов остановятся. Это первый ответ задачи.

Пусть теперь $v_0^2 \geq 2a\mu g$. Из закона движения нижнего бруска найдем, через какое время t_2 он стукнется о стену:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g} = t_1 \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Для того чтобы нижний брусок стукнулся о стену, нужно, чтобы выполнялось условие $t_2 < t_1$ (иначе брусок остановится раньше, чем доедет до стены). Поэтому остается только результат со знаком «минус» перед корнем:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Теперь можно найти скорость, которую будут иметь оба бруска после взаимодействия со стеной:

$$u = v_0 - \mu g t_2 = \sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}.$$

Это второй ответ задачи.

2. Автобус, велосипедист и грузовик в каждый момент времени образуют равнобедренный треугольник, основание которого лежит на дороге, по которой едут автобус и велосипедист (рис.10). Направим ось X вдоль этой дороги в направлении

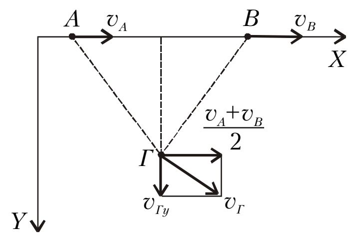


Рис. 10

движения автобуса и велосипедиста, а ось Y – перпендикулярно к ней. Тогда законы движения для автобуса, велосипедиста и грузовика будут иметь вид

$$x_A(t) = x_{A_0} + v_A t, \quad y_A(t) = 0,$$

$$x_B(t) = x_{B_0} + v_B t, \quad y_B(t) = 0,$$

$$x_Г(t) = \frac{x_{A_0} + x_{B_0}}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} t, \quad y_Г(t) = y_{Г_0} + v_{Гy} t.$$

Из условия задачи нам известен модуль скорости грузовика, который связан с проекциями скорости формулой

$$v_Г^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \left(v_{Гy}\right)^2,$$

откуда находим проекцию скорости грузовика на ось Y:

$$v_{Гy} = \sqrt{v_Г^2 - \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2}.$$

Теперь найти скорость грузовика относительно автобуса не составляет труда. По теореме Пифагора, примененной к треугольнику скоростей, имеем

$$v_{\text{отн}}^2 = \left(v_A - \frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \left(v_{Гy}\right)^2,$$

откуда

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_Г^2 - v_A v_B} = 25 \text{ км/ч}.$$

10 КЛАСС

1. В условии сказано, что коробка легкая. Значит, ее массой можно пренебречь. Поскольку давления воздуха внутри и вне коробки все время одинаковы, легко показать, что всплывающая коробка никогда не упрется в крышку цилиндра.

Заметим, что если учесть массу коробки, то результат будет зависеть от плотности материала $\rho_{\text{м}}$, из которого она изготовлена. Если $\rho_{\text{м}} < \rho$, то коробка в конце концов всплывет и упрется в крышку цилиндра, а если $\rho_{\text{м}} > \rho$, то она утонет.

2. Докажем, что если шарик поворачивает на угол $\alpha < 180°$ за два удара, то при заданной начальной скорости его конечная скорость будет максимальной в том случае, если при каждом ударе он поворачивал на угол $\alpha/2$.

Пусть до первого удара первый шарик двигался со скоростью

v. Тогда после удара первый шарик будет двигаться с некоторой скоростью, равной v_1 и направленной под углом φ к направлению первоначального движения, а второй шарик, который до удара покоился, будет двигаться со скоростью, равной v_2 и направленной под углом ψ к направлению первоначального движения первого шарика. Из закона сохранения импульса для абсолютно упругого удара движущегося шарика о неподвижный имеем

$$mv = mv_1\cos\varphi + mv_2\cos\psi,$$

$$mv_1\sin\varphi = mv_2\sin\psi,$$

причем

$$\varphi + \psi = \pi/2,$$

т.е. после абсолютно упругого нецентрального удара движущегося шара о покоящийся скорости разлетающихся шаров направлены под углом 90° друг к другу.

Отсюда находим

$$v_1 = v\cos\varphi.$$

Это означает, что поворот вектора скорости налетающего шара на угол φ сопровождается уменьшением величины скорости в $\cos\varphi$ раз. Значит, после двух последовательных соударений скорость налетающего шарика будет равна $u_2 = v\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$ (напомним, что шарик поворачивает за два удара на угол α). Для того чтобы скорость шарика после двух ударов была максимальной, необходимо, чтобы было максимальным произведение $\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$. Из известной формулы

$$\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-2\varphi)+\cos\alpha\right)$$

ясно, что это выражение будет иметь максимальное значение при $\cos(\alpha-2\varphi) = 1$, т.е. при $\varphi = \alpha/2$, что и требовалось доказать.

Рассматривая таким же способом каждую пару последовательных ударов, приходим к выводу, что, для того чтобы конечная скорость была максимальной, при каждом ударе налетающий шар должен поворачивать на один и тот же угол φ. Так как по условию после $N - 1 = 100$ соударений этот шар начинает двигаться в противоположном направлении, то $\varphi = \pi/(N-1) = \pi/100$. После сотого соударения шар будет иметь скорость

$$u_{100} = v(\cos\varphi)^{N-1}.$$

Учитывая малость угла φ, окончательно получим

$$u_{100\max} = v(\cos\varphi)^{N-1} \approx v\left(\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)^{N-1} \approx v\left(\sqrt{1-\varphi^2}\right)^{N-1} \approx$$

$$\approx v\left(1-\frac{N-1}{2}\varphi^2\right) = v\left(1-\frac{\pi^2}{200}\right) \approx 0{,}95v.$$

3. Кочерга начинает гнуться тогда, когда напряжение в ее материале превышает предел упругости σ. При этом слои, находящиеся на внешней стороне дуги изгибаемой кочерги, растягиваются, а находящиеся на внутренней стороне дуги сжимаются. Для оценки момента сил, который надо приложить, чтобы кочерга согнулась, можно считать, что на верхнюю половину сечения кочерги действует растягивающее усилие $\sigma\cdot a\cdot a/2$, а на нижнюю половину – такое же сжимающее усилие. Тогда момент сил равен

$$M = \sigma\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{\sigma a^3}{4}.$$

(Более точная оценка получается при учете линейного закона изменения напряжения по сечению.)

Получим теперь оценку для силы. Заметим, что кочергу можно гнуть двумя способами. Первый способ – упираться коленом в середину кочерги, а за ее концы тянуть руками с силой F. Тогда изгибающий момент будет равен $M = Fl/2$, откуда

$$F = \frac{2M}{l} = \frac{2}{l}\frac{\sigma a^3}{4} = \frac{\sigma a^3}{2l} = 150 \text{ Н}.$$

Это не очень большое усилие.

Второй, более «честный», способ гнуть кочергу – создавать моменты сил только ладонями рук, ничем другим не упираясь в кочергу. Считая, что ширина ладони $L \approx 10$ см, получаем

$$F_1 = \frac{M}{L} = \frac{\sigma a^3}{4L} = 750 \text{ Н}.$$

Такое усилие создать пальцами рук достаточно трудно.

4. В данной системе заряды могут располагаться либо на одной прямой, либо образовывать вершины треугольника. Случаев равновесия, когда заряды находятся на одной прямой, возможно три – они показаны на рисунке 11. Все эти случаи реализуются при любых соотношениях между зарядами q_1, q_2 и q_3, но устойчивым положением равновесия является только один из них – в зависимости от соотношения величин зарядов. Во всех этих случаях нить растягивается силами отталкивания зарядов, причем средний заряд располагается так, чтобы сумма действующих на него сил была равна нулю. Так как нить при этом оказывается сложенной пополам, то расстояние между крайними зарядами равно $l/2$, и на каждый из этих зарядов действует сила электрического отталкивания и удвоенная сила натяжения нити. Из условия равновесия зарядов для каждого из случаев находим силы натяжения нити:

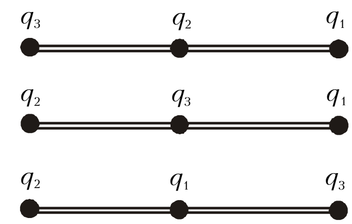


Рис. 11

$$T_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(q_1q_3 + \left(\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_2q_3}\right)^2\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(q_1q_2 + \left(\sqrt{q_1q_3}+\sqrt{q_2q_3}\right)^2\right),$$

$$T_3 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(q_2q_3 + \left(\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_1q_3}\right)^2\right).$$

Далее обсудим случай, когда заряды образуют вершины треугольника (рис.12). Рассмотрим какой-либо заряд, например q_1. Сумма сил, действующих на этот заряд, равна нулю (заряд неподвижен). Со стороны нити действуют две одинаковые по модулю силы натяжения T, направленные вдоль сторон треугольника. Следовательно, равнодействующая этих сил направлена по биссектрисе соответствующего угла. Тогда равнодействующая сил электростатического взаимодействия

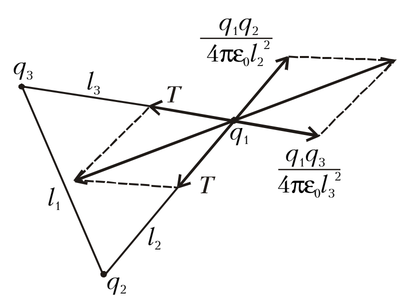


Рис. 12

заряда q_1 с зарядами q_2 и q_3 также должна быть направлена по биссектрисе этого угла, но в другую сторону. А поскольку эти силы тоже направлены вдоль сторон треугольника, то они должны быть равны по модулю между собой и каждая из них должна быть равна T. Учитывая сказанное, а также соотношение $l_1 + l_2 + l_3 = l$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} q_1 l_1^2 = q_2 l_2^2 = q_3 l_3^2, \\ l_1 + l_2 + l_3 = l, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$l_1 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_1/q_2} + \sqrt{q_1/q_3}\right)},$$

$$l_2 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_2/q_3} + \sqrt{q_2/q_1}\right)},$$

$$l_3 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_3/q_1} + \sqrt{q_3/q_2}\right)}.$$

Теперь, зная, например, расстояние l_1 между зарядами q_2 и q_3, можно вычислить силу электростатического взаимодействия между ними. Эта сила, как мы уже выяснили, равна силе натяжения нити:

$$T_4 = F_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 l_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\sqrt{q_2 q_3} + \sqrt{q_3 q_1} + \sqrt{q_2 q_1}\right)^2.$$

Осталось установить, при каком соотношении между величинами зарядов реализуется случай, когда заряды являются вершинами треугольника. По известной теореме сумма двух сторон любого треугольника больше третьей стороны:

$$l_1 + l_2 > l_3,\ l_1 + l_3 > l_2,\ l_2 + l_3 > l_1.$$

Отсюда, используя равенство $l_1 + l_2 + l_3 = l$, получаем

$$l_1 < \frac{l}{2},\ l_2 < \frac{l}{2},\ l_3 < \frac{l}{2}.$$

Подставив полученные ранее выражения для l_1, l_2 и l_3, имеем

$$\sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_1 q_2} > \sqrt{q_2 q_3},$$

$$\sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_2 q_3} > \sqrt{q_1 q_3},$$

$$\sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3} > \sqrt{q_1 q_2},$$

т.е. числа $\sqrt{q_1 q_3}$, $\sqrt{q_1 q_2}$ и $\sqrt{q_2 q_3}$ являются сторонами некоторого треугольника. Значит, расположение зарядов в виде треугольника возможно только при выполнении полученного набора условий. Этот набор можно переписать в виде

$$1/\sqrt{q_3} + 1/\sqrt{q_2} > 1/\sqrt{q_1},$$

$$1/\sqrt{q_2} + 1/\sqrt{q_1} > 1/\sqrt{q_3},$$

$$1/\sqrt{q_3} + 1/\sqrt{q_1} > 1/\sqrt{q_2}.$$

Очевидно, что эти условия не выполняются, если один из зарядов существенно меньше остальных. В этом случае заряды будут располагаться на прямой линии, причем маленький заряд будет находиться посредине между большими.

11 КЛАСС

1. Прежде всего, понятно, что максимально возможная емкость будет у батареи тогда, когда все маленькие конденсаторы будут соединены параллельно. Вопрос состоит только в том, как проводить процедуру зарядки и соединения маленьких конденсаторов. Можно, например, сначала соединить все маленькие конденсаторы параллельно, а затем присоединить к большому конденсатору. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсаторов после соединения будет

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C + N\,C/N} = \frac{Q}{2C},$$

а заряд, который приобретет батарея, будет

$$q' = \frac{Q}{2},$$

т.е. при таком способе зарядки заряд большого конденсатора просто делится пополам.

Однако можно сначала заряжать маленькие конденсаторы, а потом собирать из них батарею. При этом заряжать конденсаторы нужно так, чтобы заряд каждого был по возможности максимальным. Ясно, что самый выгодный способ создания батареи – по очереди подсоединять к большому конденсатору все маленькие конденсаторы, а уже затем собрать из них батарею.

Найдем заряд большого конденсатора после того, как к нему будет подсоединен первый маленький незаряженный конденсатор:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{Q}{C + C/N},\ Q_1 = C\Delta\varphi_1 = \frac{Q}{1 + 1/N}.$$

Заряд большого конденсатора после подключения к нему второго маленького незаряженного конденсатора будет

$$Q_2 = C\Delta\varphi_2 = \frac{Q_1}{1 + 1/N} = \frac{Q}{(1 + 1/N)^2},$$

а после N-го –

$$Q_N = \frac{Q}{(1 + 1/N)^N}.$$

Так как N достаточно велико, число $(1 + 1/1000)^{1000} \approx e \approx 2{,}72$. Поэтому после всех манипуляций на большом конденсаторе окажется заряд Q/e, а на маленьких конденсаторах – суммарный заряд $q = Q(1 - 1/e) \approx 0{,}63\,Q$. Заметим, что заряд получившейся батареи больше, чем заряд, оставшийся у большого конденсатора.

2. Поскольку в начале поворота автомобиля солнечный «зайчик» от его бокового стекла попадает в одну точку, боковое стекло движется по некоторой поверхности, фокусирующей лучи Солнца в этой точке. Считая Солнце точечным бесконечно удаленным источником, расположенным на линии горизонта, можно утверждать, что это – поверхность цилиндрического зеркала с фокусным расстоянием 10 фунтов ($\approx$3 метра).

Рассмотрим участок цилиндрического зеркала OA (рис.13). Один луч падает в точку O, проходя через ось цилиндра R, и при отражении меняет свое направление на противоположное. Другой луч падает в точку A и после отражения проходит через точку F. На рисунке обозначены три равных угла α: угол падения, угол отражения и угол между первым лучом и нормалью к цилиндрической поверхности, проведенной из точки падения второго луча. Треугольник AFR – равнобедренный, откуда следует, что расстояние от центра до точки F при малых углах равно половине радиуса. Следовательно, радиус ок-

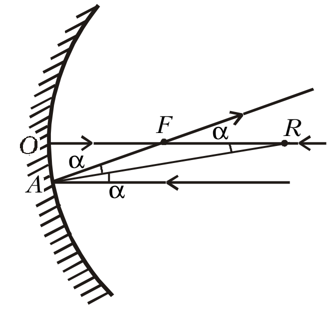


Рис. 13

ружности, по которой движется кабриолет, примерно в два раза больше расстояния от точки поворота до столба: у цилиндрического зеркала фокусное расстояние в два раза меньше радиуса его кривизны.

Максимальное центростремительное ускорение, сообщаемое силой трения, не может превосходить μg, т.е. заведомо меньше ускорения свободного падения. Обозначив скорость кабриолета через v и предполагая, что кабриолет двигался по окружности радиусом r = 20 футов, получим

$$g > \mu g = \frac{v^2}{r}, \text{ откуда } v < \sqrt{gr} \approx 8 \text{ м/с} \approx 18 \text{ миль/ч}.$$

Холмс, как всегда, оказался прав!

3. Обозначим массы ртути, воды и спирта через $m_р$, $m_в$ и $m_с$ соответственно. Пусть S – площадь сечения U-образной трубки, а x – смещение ртути от положения равновесия. Тогда уравнение колебаний ртути в трубке будет иметь вид

$$m_р a = -2\rho_1 g x S,$$

откуда для периода колебаний ртути получаем

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_р}{2\rho_1 g S}}.$$

Если теперь записать уравнения колебаний для ртути и воды, а затем для ртути, воды и спирта, то получатся аналогичные соотношения, в которых под корнем в числителе будет стоять суммарная масса жидкостей, а знаменатель не изменится, потому что возвращающая сила обусловлена только перетеканием ртути из одного колена в другое. В итоге имеем

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_р + m_в}{2\rho_1 g S}}, \quad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_р + m_в + m_с}{2\rho_1 g S}}.$$

Из написанных выражений для периодов находим

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m_р + m_в}{m_р},$$

$$\frac{T_3^2}{T_2^2} = \frac{m_р + m_в + m_с}{m_р + m_в},$$

откуда после некоторых преобразований получаем

$$m_с : m_в : m_р = \left(T_3^2 - T_2^2\right) : \left(T_2^2 - T_1^2\right) : T_1^2.$$

4. В данном процессе газ получает тепло на участках AB и BC, а отдает тепло на участках CD и DA. Используя первое начало термодинамики и уравнение Менделеева—Клапейрона, найдем полученные количества теплоты:

$$Q_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1,$$

$$Q_{BC} = \frac{3}{2}\nu R(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1).$$

Работа, совершаемая газом за цикл, равна

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Отсюда для величины $1/\eta$, где η – КПД, имеем

$$\frac{1}{\eta} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{A} = \frac{3/2\,(p_2 - p_1)V_1 + 5/2\,p_2(V_2 - V_1)}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} =$$

$$= \frac{3/2\,(p_2 - p_1)V_1 + 5/2\,p_2(V_2 - V_1) + p_1V_2 - p_1V_2 + p_1V_1 - p_1V_1}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} =$$

$$= \frac{3/2\,\Delta p V_1 + 5/2\,\Delta V p_1 + 5/2\,\Delta p \Delta V}{\Delta p \Delta V} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\frac{V_1}{\Delta V} + \frac{5}{2}\frac{p_1}{\Delta p}.$$

Здесь $\Delta p = p_2 - p_1$, $\Delta V = V_2 - V_1$. Видно, что максимальное значение КПД (минимальное значение $1/\eta$) достигается при $V_1 \ll \Delta V$ и $p_1 \ll \Delta p$. Графически это означает, что цикл прижимается к началу координат pV-диаграммы. В пределе получаем

$$\frac{1}{\eta} \to \frac{5}{2}, \text{ и } \eta_{max} = \frac{2}{5}.$$

5. Пусть лампа выделяет в окружающую среду мощность P, которая почти не изменяется со временем. Будем также считать, что изменения сопротивления лампы R и теплоемкости материала ее нити C малы. За малое время Δt в лампе выделяется тепловая энергия $\Delta Q = U_0^2/R \cos^2\omega t \cdot \Delta t$, в окружающую среду уходит количество теплоты $P\Delta t$, а разность их уходит на изменение температуры нити на величину ΔT:

$$\left(\frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t - P\right)\Delta t = C\Delta T,$$

или

$$\frac{U_0^2}{2R} + \frac{U_0^2}{2R}\cos 2\omega t - P = \frac{C\Delta T}{\Delta t}.$$

Так как средние значения $\cos 2\omega t$ и $\Delta T/\Delta t$ равны нулю (в среднем температура нити лампы постоянна), из последнего уравнения получаем

$$\frac{U_0^2}{2R} = P_{ср} \approx P.$$

Тогда имеем

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{U_0^2}{2RC}\cos 2\omega t, \text{ откуда } T = T_0 + \frac{U_0^2}{4\omega RC}\sin 2\omega t.$$

Значит, искомая амплитуда установившихся колебаний температуры равна

$$\Delta T = \frac{U_0^2}{4\omega RC}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №