2. Нужно сделать пять переливаний. *Указание.* С помощью уравнения теплового баланса находим, что разность температур после первого переливания туда-обратно составит 6 °С, после второго – 3,6 °С, после третьего – 2,16 °С, после четвертого – 1,296 °С, после пятого – 0,7776 °С. Значит, достаточно пяти переливаний.

9 КЛАСС

1. После удара верхнего бруска о стену его скорость изменится на противоположную по направлению, сохранив свой модуль, а скорость нижнего бруска не изменится. Затем бруски начнут двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю начальными скоростями и равными по модулю, но противоположно направленными ускорениями. Из-за этого скорости брусков будут уменьшаться, все время оставаясь равными друг другу. В результате нижний брусок либо не достигнет стены, либо все же ударится о нее, имея некоторую скорость u. В первом случае оба бруска останутся стоять неподвижно на некотором расстоянии от стены. Во втором случае нижний брусок, ударившись о стену, поменяет направление своей скорости на противоположное, в результате чего проскальзывание между брусками прекратится и оба бруска продолжат движение со скоростью, равной u, в направлении от стены. Рассмотрим отдельно оба случая.

Поместим начало координатной оси X в угол между стеной и полом и направим ее в сторону первоначального движения брусков. Ясно, что после первого удара сила трения между брусками составляет $F_{\text{тр}} = \mu Mg$, ускорение нижнего и верхнего брусков по модулю равно $F_{\text{тр}}/M = \mu g$. Тогда закон движения передней грани нижнего бруска имеет вид

$$x = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2},$$

а его скорость изменяется по закону

$$v = v_0 - \mu g t,$$

при этом время отсчитывается от момента удара верхнего бруска о стену. Найдем условие на скорость v_0, при которой нижний брусок не доедет до стены (не достигнет координаты $x = 0$). Оно получается из неравенства

$$x = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2} < 0.$$

Решая его, находим, что дискриминант квадратного трехчлена, содержащегося в неравенстве, отрицателен при

$$v_0^2 < 2a\mu g.$$

Это и есть искомое условие. Время, через которое нижний брусок остановится, можно определить, приравняв скорость v нулю:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g}.$$

Значит, при $v_0^2 < 2a\mu g$ оба бруска в конце концов остановятся. Это первый ответ задачи.

Пусть теперь $v_0^2 \geq 2a\mu g$. Из закона движения нижнего бруска найдем, через какое время t_2 он стукнется о стену:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g} = t_1 \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Для того чтобы нижний брусок стукнулся о стену, нужно, чтобы выполнялось условие $t_2 < t_1$ (иначе брусок остановится раньше, чем доедет до стены). Поэтому остается только результат со знаком «минус» перед корнем:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Теперь можно найти скорость, которую будут иметь оба бруска после взаимодействия со стеной:

$$u = v_0 - \mu g t_2 = \sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}.$$

Это второй ответ задачи.

2. Автобус, велосипедист и грузовик в каждый момент времени образуют равнобедренный треугольник, основание которого лежит на дороге, по которой едут автобус и велосипедист (рис.10). Направим ось X вдоль этой дороги в направлении

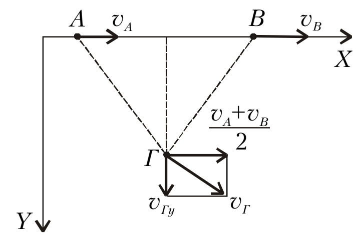

Рис. 10

движения автобуса и велосипедиста, а ось Y – перпендикулярно к ней. Тогда законы движения для автобуса, велосипедиста и грузовика будут иметь вид

$$x_A(t) = x_{A_0} + v_A t, \quad y_A(t) = 0,$$

$$x_B(t) = x_{B_0} + v_B t, \quad y_B(t) = 0,$$

$$x_Г(t) = \frac{x_{A_0} + x_{B_0}}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} t, \quad y_Г(t) = y_{Г_0} + v_{Гy} t.$$

Из условия задачи нам известен модуль скорости грузовика, который связан с проекциями скорости формулой

$$v_Г^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \left(v_{Гy}\right)^2,$$

откуда находим проекцию скорости грузовика на ось Y:

$$v_{Гy} = \sqrt{v_Г^2 - \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2}.$$

Теперь найти скорость грузовика относительно автобуса не составляет труда. По теореме Пифагора, примененной к треугольнику скоростей, имеем

$$v_{\text{отн}}^2 = \left(v_A - \frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \left(v_{Гy}\right)^2,$$

откуда

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_Г^2 - v_A v_B} = 25 \text{ км/ч}.$$

10 КЛАСС

1. В условии сказано, что коробка легкая. Значит, ее массой можно пренебречь. Поскольку давления воздуха внутри и вне коробки все время одинаковы, легко показать, что всплывающая коробка никогда не упрется в крышку цилиндра.

Заметим, что если учесть массу коробки, то результат будет зависеть от плотности материала $\rho_{\text{м}}$, из которого она изготовлена. Если $\rho_{\text{м}} < \rho$, то коробка в конце концов всплывет и упрется в крышку цилиндра, а если $\rho_{\text{м}} > \rho$, то она утонет.

2. Докажем, что если шарик поворачивает на угол $\alpha < 180°$ за два удара, то при заданной начальной скорости его конечная скорость будет максимальной в том случае, если при каждом ударе он поворачивал на угол $\alpha/2$.

Пусть до первого удара первый шарик двигался со скоростью