Значит, x_2 – корень многочлена P_2 с рациональными коэффициентами.

Получили: $P(x) = P_2(x)(x-\alpha)$, где $\alpha \in \boldsymbol{Q}$. Противоречие.

Решение задачи. $\cos 20°$, $-\cos 40°$, $-\cos 80°$ – корни уравнения $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$. Достаточно доказать, что $P(y) = y^3 - 3y - 1$ не имеет рациональных корней. Но такими корнями могли бы быть лишь числа ± 1.

5. Пусть $g(x) = x - f(x)$. Тогда условие $f(x) = x + f(x - f(x))$ можно, перенеся x налево, записать в виде $-g(x) = f(g(x))$. Заметим, что:

1) $g(x)$ – непрерывная функция от x;
2) $g(0) = 0$;
3) $g(g(x)) = g(x) - f(g(x)) = 2g(x)$.

Таким образом, если функция g принимает какое-то положительное значение, то она принимает сколь угодно большие положительные значения; аналогично – с отрицательными значениями. Но поскольку $g(x)$ непрерывна, если она принимает значения a и b, то она принимает все значения между a и b.

Таким образом, возможны только 4 случая:

1) $g(x) = 0$ для всех x;
2) $g(x)$ принимает все неотрицательные значения, и только их;
3) $g(x)$ принимает все неположительные значения, и только их;
4) $g(x)$ принимает все значения.

Случай 1. $\forall x\ g(x) = x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x\ f(x) = x$.

Случай 2. Поскольку всякое $x \geq 0$ представимо в виде $x = g(y)$, то $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$; для $x < 0$ имеем $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$. Убедимся, что все такие непрерывные функции подходят. Если $x \geq 0$, то $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(2x) + x + x = 0$. Если $x < 0$, то $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(x) - x + x - f(x) = 0$, поскольку $x - f(x) \geq 0$.

Случай 3. Аналогично случаю 2, получаем все непрерывные функции, для которых $f(x) = -x$ при $x \leq 0$, $f(x) \geq x$ при $x > 0$.

Случай 4. Все x представимы в виде $x = g(y)$, тогда $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$.

6. Решение опирается на два следующих утверждения.

Лемма 1. В описанном четырехугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, проходят через точку пересечения диагоналей.

Лемма 2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ касательные к описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой PQ, проходящей через точки пересечения противоположных сторон четырехугольника.

Обе леммы можно доказать, спроектировав точку пересечения диагоналей четырехугольника в центр окружности или рассматривая четырехугольник как вырожденный шестиугольник и применяя теоремы Брианшона и Паскаля. (Доказательство этих лемм можно найти, например, в статье А.Заславского «Некоторые факты проективной геометрии», опубликованной в «Кванте» №1 за 1996 год.)

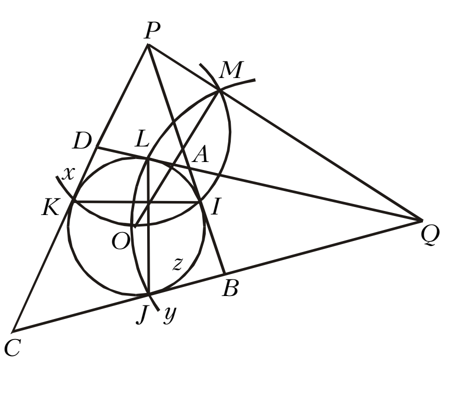

Рис. 8

Пусть теперь $ABCD$ – описанный четырехугольник, I, J, K, L – точки касания вписанной окружности z со сторонами AB, BC, CD, DA, P – точка пересечения AB и CD, Q – точка пересечения AD и BC, M – основание перпендикуляра, опущенного из O на PQ (рис.8).

Построим на отрезках OP, OQ как на диаметрах окружности x, y. Точки M, I, K лежат на окружности x, так как соответствующие углы прямые. Аналогично L, J, M лежат на y.

Прямые LJ, KI, OM являются общими хордами окружностей y и z, x и z, x и y соответственно. Следовательно, они пересекаются в одной точке, которая по лемме 1 совпадает с точкой пересечения диагоналей $ABCD$.

Мы доказали утверждение а).

Для доказательства утверждения б) заметим, что углы OMK и OMI равны, так как равны соответствующие дуги окружности x. Аналогично равны углы OML и OMJ. Поэтому при симметрии относительно OM точки I, J перейдут в точки I', J', лежащие на прямых MK, ML соответственно. Точка B перейдет в точку B' пересечения касательных к окружности в точках I', J'. При этом точки M, B', D лежат на одной прямой по лемме 2. Следовательно, углы BMO и DMO равны (заметим, что углы AMO и CMO также равны).

Примечание. Утверждение а) сразу следует из того, что прямая PQ является полярой точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

8 КЛАСС

1. Эту задачу проще всего решать графически (рис.9). Нарисуем прямоугольную систему координат «положение автомобиля – время» $(x-t)$ и отметим на этом чертеже последовательные положения автомобиля настолько точно, насколько

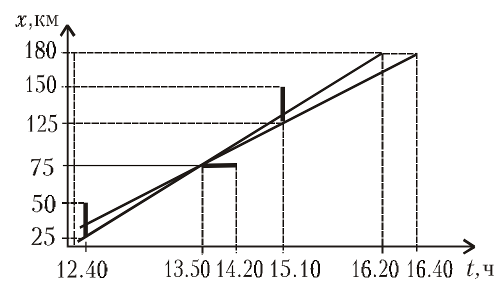

Рис. 9

это позволяет условие задачи. Мы знаем, что в 12 ч 40 мин координата автомобиля удовлетворяла неравенству $25 < x < 50$, т.е. положение автомобиля в указанный момент времени изображается на чертеже вертикальным отрезком. Аналогичными отрезками изображаются и два других положения автомобиля, о которых идет речь в условии. Известно, что при равномерном движении зависимость координаты от времени изображается прямой линией. Значит, для того чтобы получить ответ, нужно провести две прямые линии так, чтобы они обе проходили через нарисованные на чертеже отрезки, но при этом одна из них должна иметь максимально возможный наклон, а вторая – минимально возможный наклон. Эти прямые отсекут на горизонтальной линии, соответствующей координате $x = 180$ км, отрезок, который и даст нам искомый интервал времени. Из рисунка видно, что прибытия автомобиля в Борискино можно ожидать примерно с 16 ч 20 мин до 16 ч 40 мин.