слагаемых.

5. *Ответ*: в отношении 5:7, считая от вершины A. Решим сначала «задачу одного гвоздя». Пусть вбит один гвоздь, касающийся треугольника в точке M на стороне AC. Фиксируем центр предполагаемого вращения (точка O). Можно ли повернуть треугольник вокруг точки O на небольшой угол, и если да, то в какую сторону?

Пусть треугольник расположен так, что при повороте вокруг центра на 60° по часовой стрелке вершина A переходит в вершину B. Проведем перпендикуляр к прямой AC в точке M. Он разобьет плоскость на две полуплоскости. Если точка O лежит в той же полуплоскости, что и C, то вокруг точки O можно повернуть треугольник по часовой стрелке, а если в другой полуплоскости, то против часовой стрелки.

Вернемся к «задаче трех гвоздей». Проведем три соответствующих перпендикуляра. Докажем, что если они не пересекаются в одной точке, то треугольник можно повернуть. Действительно, перпендикуляры разбили плоскость на семь областей. Сопоставим каждой области строку из трех символов типа + или −. Первый плюс означает, что гвоздь на стороне AB не препятствует вращению треугольника вокруг точек этой области по часовой стрелке и т.д. Разным областям не могут соответствовать одинаковые строки. Всех возможных строк восемь. Поэтому наверняка встретится или строка +++, или строка − − −.

Итак, перпендикуляры пересекаются в одной точке. Точки, где вбиты гвозди на сторонах AB, BC и AC, обозначим соответственно через D, E и F. Пусть перпендикуляр к AB в точке D пересекает AC в точке K, перпендикуляр к BC в точке E пересекает AC в точке H, и эти перпендикуляры пересекаются в точке R. Тогда $AK = AD/\cos 60^\circ = AC/2$ и $CH = CE/\cos 60^\circ = 2/3AC$. Треугольник HRK равнобедренный, поскольку углы HKR и KHR равны 30°. Отсюда $HF = FK$ и F делит сторону AC в отношении 5:7, считая от вершины A.

11 КЛАСС

1. Заметим, что

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(2z-1).$$

Если левая часть равенства равна нулю, то хотя бы один множитель справа равен нулю.

2. Нет, не следует. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x \le 1; \\ 1/x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

3. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим равносторонний треугольник APQ, для которого отрезок AK является медианой, а точка P лежит на прямой AB. Так как точка пересечения медиан всегда делит медианы в отношении 2:1, точка M является точкой пересечения медиан, т.е. центром треугольника APQ. Значит, $\angle KPM = 30^\circ = \angle KBM$. Следовательно, точки M, K, P, B лежат на одной окружности. Так как угол $\angle MKP$ прямой, MP − диаметр этой окружности. Эта окружность пересекает AP ровно в двух точках, одна из которых P, а другая, B, − середина AP.

Пусть сторона треугольника APQ равна $2a$. Имеем: $AB = a$, $AK = \sqrt{3}a$. Треугольник BKP − равносторонний, $BK = a = KC$ и $BC = 2a$. Далее, $\angle ABK = 120^\circ$, откуда по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos 120^\circ = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2$. Наконец, находим $\cos\angle ACB = (4+7-1)\big/\left(2\cdot 2\sqrt{7}\right) = 5\big/\left(2\sqrt{7}\right)$ и $\cos\angle CAB = (7+1-4)\big/\left(2\sqrt{7}\right) = 2/\sqrt{7}$.

4. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т.е. 1. Поэтому z − четное число. Аналогично, левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число x тоже четное. Обозначив $z = 2t$, имеем $5^t - 2^y = 3^u$, $5^t + 2^y = 3^v$. Поэтому $u = 0$, $v = x = 2k$. Значит, $1 + 2^{y+1} = 3^{2k}$, откуда $\left(3^k+1\right)\left(3^k-1\right) = 2^{y+1}$. Получили $3^k + 1 = 2^m$, $3^k - 1 = 2^n$, $2^m - 2^n = 2$. Отсюда $n = 1$, $k = 1$, $y = 2$, $x = 2k = 2$, $z = 2$.

5. Число 61 нечетное, поэтому на плоскости такая система шестеренок вращаться не сможет: если одна из шестеренок вращается по часовой стрелке, ее соседи должны вращаться против часовой стрелки, и наоборот. Однако в пространстве

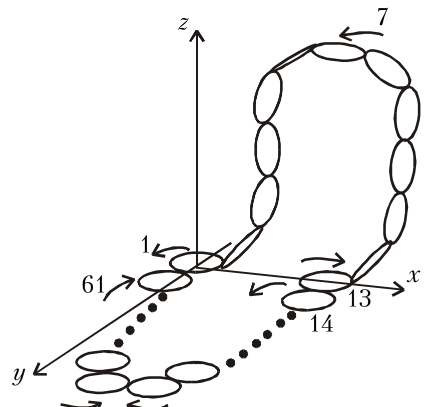

Рис. 7

требуемая конструкция возможна − см. рис.7.

Плоскости шестеренок 1—13 перпендикулярны координатной плоскости Oxz; шестеренки 13—61 и 1 содержатся в плоскости Oxy. При этом шестеренки 13, 15, 17, ..., 61 вращаются по часовой стрелке (если смотреть на плоскость Oxy сверху), а шестеренки 14, 16, ..., 60, 1 − против часовой стрелки. На участке 1—13 этой цепочки происходит перемена четности номеров шестеренок, вращающихся в плоскости Oxy в одну сторону: шестеренки 1 и 13 вращаются в разных направлениях.

*Комментарий***.** Встретившийся в этой задаче объект называется лентой Мёбиуса.

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. *Первое решение.* Пусть $P(x) = a_k x^k + a_m x^m + \ldots$, где $k > m \ge 0$. Тогда $P(P(x)) = a_k\left(a_k x^k + a_m x^m + \ldots\right)^k + a_m\left(a_k x^k + a_m x^m + \ldots\right)^m + \ldots$ При раскрытии первой скобки получаются степени $k^2 > k(k-1) + m > \ldots$ Старшая степень второй скобки равна km. Но $k(k-1) + m > km$ при $k > 1$. В этом случае $k(k-1) + m > 0$. Получили: $k = 1$, $n = 1$. Легко видеть, что $P(x) = x - \frac{1}{2}$.

Второе решение. Обозначим $Q = P'$, тогда $Q(x)Q(P) = nx^{n-1}$. Значит, $Q(x)$ одночлен: $Q(x) = a_k x^k$. $Q(P(x))$ также одночлен. При $k > 0$ это означает, что $P(x)$ − одночлен. Противоречие. Получили: $P(x) = ax + b$, $n = 1$.

2. Перепишем уравнение: $(x - a)(y - a) = a^2$, где $x \ne 0$. Число целых решений этого уравнения имеет вид $4k + 1 \ne 99$.

3. Занумеруем школьников в порядке очереди в первый день. Пусть их всего n. Пусть k − номер школьника, игравшего с последним в первый день. Тогда он играл со школьниками с номерами от $k + 1$ до n. Ясно, что во второй день он также играл с кем-то из них.

4. *Лемма.* Если x_1, x_2, x_3 − корни $x^3 + px + q$, p, $q \in \boldsymbol{Q}$, x_1, x_2, $x_3\ \overline{\in}\ \boldsymbol{Q}$, то $ax_1 + bx_2 + cx_3 \ne 1$ при a, b, $c \in \boldsymbol{Q}$.

Доказательство. Пусть $x_1 \ne x_2$, $Ax_1 + Bx_2 = 1$, $A, B \in \boldsymbol{Q}$, $A \ne 0$.

$$P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2)\left(\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) + p\right) = 0.$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1 > 0.$$