них чисел суть числа от 1 до k включительно, а $100 - k$ красных чисел – числа от $k + 1$ до 100 включительно (идущие в обратном порядке).

5. Заметим, что если у человека есть знакомые, сидящие рядом (в частности, если он знаком со своим соседом), то этот человек знаком со всеми. Докажем, что такой гость найдется.

Пусть A и B – двое соседей. Если они не знакомы между собой, то их общий знакомый C знаком со всеми, так как его знакомые сидят без промежутков. В противном случае знаком со всеми человек A (по той же причине).

Итак, пусть X – гость, знакомый со всеми. Тогда его соседи тоже знакомы со всеми, так как они знакомы с X (являющимся для них соседом). Соседи этих соседей также знакомы со всеми, и так далее по кругу в обе стороны.

9 КЛАСС

1. Нет. $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = \left(2^9 + 3^{10}\right)^2$.

2. Проведем третью высоту BS и продлим ее до пересечения с PQ в точке T. Докажем, что площади прямоугольников $ASTQ$ и $AEKL$ равны. Из подобия прямоугольных треугольников ABS и AEC получаем $AE/AC = AS/AB \Leftrightarrow AE \cdot AB = AS \cdot AC \Leftrightarrow AE \cdot AL = AS \cdot AQ$. Аналогично, равны площади прямоугольников $CSTP$ и $CDMN$.

4. Обозначим военные базы числами от 1 до n. Если некоторый набор – стратегический, то при выкидывании всех входящих в него дорог множество баз $\{1, \ldots, n\}$ распадается ровно на две не соединенные друг с другом части, внутри которых все дороги сохранены. Пусть первый стратегический набор разбивает множество $\{1, \ldots, n\}$ на подмножества A и B, а второй – на C и D.

Пусть $K = A \cap C$, $L = A \cap D$, $M = B \cap C$, $N = B \cap D$. Множества K, L, M, N попарно не пересекаются, пустым может быть только одно из них (или ни одного), а объединение этих множеств дает $\{1, \ldots, n\}$.

При закрытии первого стратегического набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и M, K и N, L и M, L и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие множества K с L и M с N. При закрытии второго набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и L, K и N, L и M, M и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие K с M и L с N. Итак, множество дорог, принадлежащих ровно одному стратегическому набору – это все дороги, соединяющие K и L, K и M, L и N, M и N, а также, возможно, некоторые дороги, соединяющие K с N и L с M. Следовательно, при закрытии такого набора дорог множество баз распадется по крайней мере на (непустые) множества $K \cup N$ и $L \cup M$, не соединенные дорогами. Другими словами, мы получим важный набор, что и требовалось доказать.

5. Заметим, что геометрическое место точек O таких, что $\angle AOD = 80°$ и точка O лежит по ту же сторону от AD, что и B – это дуга окружности, проходящей через точки A и D, а множество точек O, для которых $\angle BOC = 100°$, причем точка O лежит по ту же сторону от BC, что и A – это дуга окружности, проходящей через B и C. Точка O должна лежать на пересечении этих двух дуг. Следовательно, таких точек может быть не более двух.

Укажем две точки, удовлетворяющие условиям задачи. Первая точка, O_1, лежит на диагонали AC, причем $\angle BO_1C = 100°$. Тогда, очевидно, $\angle AO_1B = 80°$, и в силу симметрии относительно AC имеем $\angle AO_1D = \angle AO_1B = 80°$, что и требуется в условии. Аналогично, вторая точка, O_2, лежит на диагонали BD, причем $\angle BO_2C = 100°$. В этом случае $\angle AO_2D = 80°$ и $\angle AO_2B = 100°$.

Легко видеть, что эти две точки различны (они лежат на разных диагоналях и отличны от точки пересечения диагоналей P) и обе лежат внутри ромба.

Ответ: 80° или 100°.

6. Координата каждой отмеченной точки удовлетворяет соотношению вида $x = (y + z)/2$, где y и z – координаты других отмеченных точек или концов отрезка. Заменив координаты отмеченных точек переменными, получим систему линейных уравнений с рациональными коэффициентами и свободными членами (будем называть такую систему рациональной).

Предположим, что решение системы не единственно. Сравним то решение, о котором сказано в условии задачи, с каким-либо другим. Назовем *смещением* переменной абсолютную величину разности ее нового и старого значений. Пусть d – наибольшее из смещений переменных, и среди переменных с таким смещением наибольшее значение в первом решении принимает переменная x. Выполнено соотношение $x = (y + z)/2$, где y и z – другие переменные либо концы отрезка. Пусть в первом решении точка y лежит слева от x, а z – справа (по условию все эти точки не совпадают). Ввиду выбора x смещение z меньше d. Но смещение суммы не превосходит суммы смещений. Как следствие, смещение y больше d, что также противоречит выбору x. Поэтому в действительности решение системы единственно.

Задача свелась к доказательству следующего факта: если рациональная система имеет единственное решение, то оно рационально. Докажем это индукцией по числу переменных. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо при всех $1 \le k < n$. Выразим какую-либо переменную через другие из уравнения, в которое она входит с ненулевым коэффициентом. Подставив полученное выражение в остальные уравнения, получим рациональную систему с меньшим числом переменных. Ее решение единственно (иначе решение исходной системы не было бы единственным) и по предположению индукции рационально. Исключенная переменная выражена через остальные также рационально, поэтому рационально и ее значение, что и требовалось.

Замечание. Несовпадение точек в условии задачи существенно. Действительно, если три иррациональных точки отрезка [0; 1] совпадают, то каждая из них лежит посередине между двумя другими.

10 КЛАСС

1. Пусть $a + b + c \le 11$. Тогда $28a + 30b + 31c \le 11 \cdot 31 = 341$. Противоречие. Пусть $a + b + c \ge 13$. Тогда $28a + 30b + 31c \ge 13 \cdot 28 = 364$, причем равенство достигается только в случае $a = 13$, $b = c = 0$. Во всех остальных случаях $28a + 30b + 31c \ge 366$. Противоречие. Остается единственный случай $a + b + c = 12$.

3. *Ответ*: 1998. Занумеруем фонари натуральными числами в порядке следования вдоль дороги. Если отрезки, освещенные n-м и $(n+2)$-м фонарями, пересекаются, то $(n+1)$-й фонарь можно выключить. Следовательно, отрезки с различными нечетными номерами не пересекаются. На отрезке длиной 1000 м нельзя расположить больше 999 непересекающихся отрезков длиной 1 м. Значит, фонарей не больше 1998.

Расположим 1998 фонарей так, чтобы центры освещенных отрезков образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен 0,5 м, а 1998-й равен 999,5 м. Между n-м и $(n+2)$-м отрезком остается зазор в $(1/1997)$ м. Его освещает только $(n+1)$-й фонарь. Поэтому никакой фонарь нельзя выключить.

4. *Ответ*: не существует. Обозначим через $S(X)$ сумму цифр числа X. Из алгоритма сложения в столбик видно, что $S(X + Y) = S(X) + S(Y) - 9P(X, Y)$, где $P(X, Y)$ – число переносов при сложении X и Y в столбик. Отсюда $S(1998X) = S(2000X) - S(2X) + 9P(2X, 1998X) = 9P(2X, 1998X)$, так как $S(2000X) = S(2X)$. Но $P(2X, 1998X) \ge 3$, так как сумма этих чисел имеет на конце на 3 нуля больше, чем каждое из