базы, не соединенные путем. Важный набор называется *стратегическим,* если он не содержит меньшего важного набора. Докажите, что множество дорог, принадлежащих ровно одному из двух различных стратегических наборов, образует важный набор.

А.Скопенков

5. Точка O лежит внутри ромба $ABCD$. Угол DAB равен 110°. Углы AOD и BOC равны 80° и 100° соответственно. Чему может быть равен угол AOB?

М.Волчкевич

6. На отрезке [0; 1] отмечены несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

В.Произволов

10 класс

1. Пусть a, b, c – целые неотрицательные числа такие, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

В.Произволов, С.Анисов

2. См. задачу М1637 «Задачника «Кванта».

3. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

С.Агеев

4. Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

А.Канель-Белов, С.Анисов

5. На пол положили правильный треугольник ABC, выпиленный из фанеры. В пол вбили три гвоздя (по одному вплотную к каждой стороне треугольника) так, что треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении 1:3, считая от вершины A, второй делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону AC третий гвоздь?

А.Шень

6. См. задачу М1645 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = 1/2.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $1/2$.

В.Произволов

2. Про непрерывную функцию f известно, что:

а) f определена на всей числовой прямой;

б) f в каждой точке имеет производную (и, таким образом, график f в каждой точке имеет единственную касательную);

в) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая – иррациональна.

Следует ли отсюда, что график f – прямая?

С.Вольфрам

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы $\angle BAK$ и $\angle CBL$ равны 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Г.Гальперин

4. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

А.Эвнин, В.Сендеров

5. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из 61 одинаковых согласованно вращающихся шестеренок так, чтобы углы между сцепленными шестеренками были не меньше 150°? При этом:

а) для простоты шестеренки считаются кругами;

б) шестеренки сцеплены, если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную;

в) угол между сцепленными шестеренками – это угол между радиусами их окружностей, проведенными в точку касания;

г) первая шестеренка должна быть сцеплена со второй, вторая – с третьей, ..., 61-я – с первой, а другие пары шестеренок не должны иметь общих точек.

С.Анисов

6. См. задачу М1645 «Задачника «Кванта».

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Для каких натуральных n существует такой многочлен с вещественными коэффициентами $P(x)$, что $P(P(x)) = x^n - 1$? (9)

М.Евдокимов

2. Существует ли такое целое число a, что уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ имеет 99 решений в целых числах? (9)

В.Сендеров

3. Несколько школьников играют в пинг-понг «на вылет». Они образовали очередь, первый играет со вторым, победитель этой пары – с третьим и т.д. вплоть до последнего. На следующий день они снова играют по такой системе, но порядок в очереди заменили на противоположный: последний стал первым, предпоследний – вторым и т.д., первый стал последним. Докажите, что найдется пара, которая играла между собой и в первый день, и во второй. (10)

Б.Френкин

4. Можно ли подобрать рациональные числа a, b, c так, чтобы выполнялось равенство

$$a\cos 20° + b\cos 40° + c\cos 80° = 1? \text{ (11)}$$

В.Сендеров

5. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, обладающие свойствами:

а) $f(x)$ определена на всей числовой прямой;

б) для всех x имеет место равенство

$$f(x) = x + f(x - f(x));$$

в) $f(0) = 0$. (11)

И.Дынников

6. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC – в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что

а) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;

б) углы $\angle BMO$ и $\angle DMO$ равны. (11)

Фольклор

Публикацию подготовили
С.Анисов, А.Ковальджи,
В.Сендеров, Г.Челноков