LXI Московская математическая олимпиада

Избранные задачи окружного тура

1. Тренер опросил всех шахматистов, сколько сегодня партий сыграл каждый из них. Шестеро ответили, что сыграли по две партии, трое – что сыграли по три партии. Могло ли такое быть? Если да, то сколько всего партий было сыграно? Если нет, то почему? (6)[1]

А.Котляров

2. Придумайте раскраску клеток доски 6×6 в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, между которыми ровно одна клетка (по горизонтали, вертикали или диагонали), были покрашены в разные цвета. Соседние клетки можно красить в один цвет. (6)

3. Квадрат разрезан на четыре прямоугольника и квадрат (рис.1). Прямоугольники, содержащие вершины A и C, имеют соответственно размеры 1×4 и 2×5. Найдите сторону внутреннего квадрата. (7)

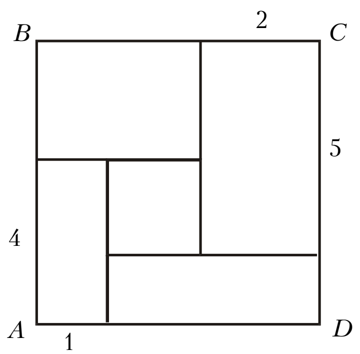

Рис. 1

4. Пройдя $3/8$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил сзади на дороге автомобиль, идущий со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, а если вперед, то автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает Иа-Иа? (7)

5. На клумбе, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 2 м, растут 5 гвоздик. Докажите, что в любом случае какие-то две гвоздики растут на расстоянии не больше 1 м. (7)

6. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точка M – середина AC. Докажите, что $MD = ME$. (8)

7. Известно, что $a^2 + b^2 = 6ab$ и $a > b > 0$. Найдите $(a+b)/(a-b)$. (8)

8. С таблицей чисел разрешается проделывать две операции: менять местами любые две строки и менять местами любые два столбца. Докажите, что такими операциями нельзя получить из левой таблицы правую (рис.2). (8)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
6	5	4
7	8	9

Рис. 2

9. По кругу написаны числа 1, 2, ..., n, где n – нечетное число. На каждом числе сидит один кузнечик. Кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке так, что величина очередного прыжка равна числу, на котором сидел кузнечик (он прыгает с 1 на 2, с 2 на 4, с 3 на 6 и т.д.). Докажите, что на каждом числе снова окажется один кузнечик. Рассмотрите случаи а) $n = 7$, б) $n = 2k + 1$. (8)

А.Ковальджи

10. Найдите x_{9999}, если $x_0 = 100$, $x_1 = \sqrt{x_0^2 - 1}$, ..., $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 1}$. (9)

А.Канель-Белов

11. В правильном треугольнике ABC на стороне AB взяли точку E и на отрезке EC построили в сторону точки B правильный треугольник EKC. Докажите, что прямые AC и BK параллельны. (9)

12. Окружность разбита на 200 дуг, содержащих целое число градусов. Докажите, что несколько дуг подряд составляют дугу 180°. (9)

В.Произволов

13. Хоккейный матч «Льдинка» – «Снежинка» окончился со счетом 9:5. Докажите, что в матче был такой момент, когда «Льдинке» оставалось забить столько шайб, сколько «Снежинка» уже забила. (9)

14. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC – точка E. Прямые AE и CD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника DOE меньше площади AOC. (10)

А.Ковальджи

15. В чашку налили 20 ложек кофе. Саша выпивает из чашки одну ложку кофе и добавляет одну ложку молока. Перемешивает. Затем выпивает одну ложку смеси и опять доливает ложку молока. Проделав такую операцию несколько раз, может ли Саша получить смесь, состоящую наполовину из кофе и наполовину из молока? (10)

16. Придумайте квадратный трехчлен $x^2 - 2px + q$ такой, что при добавлении маленького числа $e = 10^{-10}$ к параметру p больший корень увеличится на большое число $E = 10^{10}$ (больший корень $x^2 - 2(p + e)x + q$ больше большего корня $x^2 - 2px + q$ на E; если корни равны, то считается, что больший корень равен меньшему). (10)

17. Некоторый многогранник склеен из черных пятиугольников и белых шестиугольников. Каждый пятиугольник граничит только с шестиугольниками, а каждый шестиугольник – с тремя пятиугольниками и тремя шестиугольниками. Каких ребер у многогранника больше: разделяющих белые грани или разделяющих белые и черные грани? (10)

А.Ковальджи

18. Докажите, что

$$\int_0^1 \sin(\sin x)dx < 1. \qquad (11)$$

А.Блинков

[1] В скобках указан класс, в котором предлагалась задача.