Диагонально-перпендикулярное отображение четырехугольников

А.ЗАСЛАВСКИЙ

ПОВОДОМ к написанию этой заметки послужила задача М1154 из «Задачника Кванта»: *докажите, что если четырехугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг другой окружности, то прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.*

Эту задачу можно решать разными способами. В частности, одно из решений приводится в «Кванте» (№8 за 1989 год). Нашей же целью будет формулировка и доказательство более общего утверждения, в котором будет рассматриваться произвольный четырехугольник. Основным инструментом для нас будет диагонально-перпендикулярное отображение, которое мы определим следующим образом:

Определение. Возьмем произвольный четырехугольник $ABCD$ и из точки O пересечения его диагоналей опустим перпендикуляры OK, OL, OM, ON на его стороны. Четырехугольник $KLMN$ будем называть *образом* четырехугольника $ABCD$ при *диагонально-перпендикулярном отображении* (рис.1).

Примечание 1. Строго говоря, наше определение не является вполне корректным, так как четырехугольник $KLMN$ может оказаться вырожденным: три или даже все четыре его вершины могут лежать на одной прямой. Впрочем, для дальнейшего изложения это несущественно.

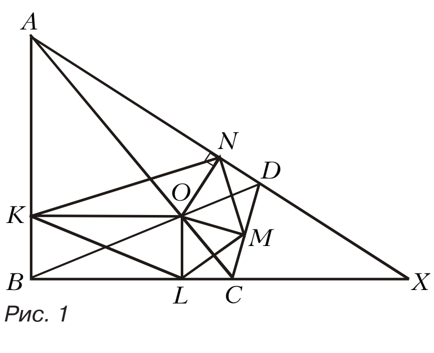

Рис. 1

Исследуем свойства нашего отображения. Прежде всего выясним, можно ли восстановить четырехугольник $ABCD$ по четырехугольнику $KLMN$.

Продолжим на рисунке 1 стороны BC и AD до их пересечения в точке X. Очевидно, что $\angle BXA = \angle BOA - \angle OBC - \angle OAD$. Но четырехугольник $OKBL$ – вписанный, так как его противоположные углы прямые. Поэтому $\angle OBC = \angle LKO$. Аналогично, $\angle OAD = \angle OKN$, и значит, $\angle BXA = \angle BOA - \angle LKN$. С другой стороны, $\angle BOA = (\angle BOA + \angle COD)/2 = (\angle OBC + \angle OCB + \angle OAD + \angle ODA)/2 = (\angle OKL + \angle OKN + \angle OML + \angle OMN)/2 = (\angle LKN + \angle LMN)/2$. Таким образом, $\angle BXA = (\angle LMN - \angle LKN)/2$, и следовательно, $\angle LON = \pi - (\angle LMN - \angle LKN)/2$. Аналогично, $\angle KOM = \pi - (-\angle KNM)/2$.

Мы видим, что четырехугольник $KLMN$ однозначно определяет точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (известны углы, под которыми видны из точки O диагонали четырехугольника). Нетрудно проверить также, что если соединить построенную таким образом точку O с вершинами $KLMN$ и провести через них перпендикуляры к соответствующим отрезкам, то диагонали получившегося четырехугольника пересекутся в точке O (непосредственное вычисление дает $\angle BOD = \angle COA = \pi$). Следовательно, диагонально-перпендикулярный образ позволяет однозначно восстановить исходный четырехугольник.

Продолжим изучение свойств диагонально-перпендикулярного отображения. Прежде всего докажем

Утверждение 1. *В четырехугольник $KLMN$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, причем центром окружности, вписанной в $KLMN$, является точка O пересечения диагоналей $ABCD$.*

Доказательство. Если четырехугольник $ABCD$ – вписанный, то углы OBC и OAD равны. Но $\angle OBC = \angle OKL$, $\angle OAD = \angle OKN$, т.е. OK – биссектриса угла K четырехугольника $KLMN$. Аналогично, точно O лежит на биссектрисах остальных углов $KLMN$, и значит, совпадает с центром вписанной в него окружности. С другой стороны, если четырехугольник $KLMN$ – описанный, то соединив центр вписанной окружности с его вершинами и построив четырехугольник $ABCD$, получим, что углы OBC и OAD равны, и точки A, B, C, D лежат на окружности.

Утверждение 1 дает возможность обобщить понятие центра вписанной окружности на четырехугольник, не являющийся описанным: будем называть квазицентром вписанной окружности четырехугольника $KLMN$ точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, являющегося диагонально-перпендикулярным прообразом $KLMN$.

Попробуем теперь обобщить понятие центра описанной окружности. Для этого прежде всего сформулируем

Утверждение 2. *Четырехугольник $KLMN$ является вписанным тогда и только тогда, когда диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.*

Доказательство. Ранее было показано, что угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$ равен полусумме противоположных углов четырехугольника $KLMN$. Утверждение 2 является очевидным следствием этого.

Выясним, где находится центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$. Продолжим отрезки OK, OL, OM, ON за точку O до пересечения с противоположными сторонами четырехугольника $ABCD$ в точках соответственно K', L', M', N'. Докажите самостоятельно следующие утверждения (рис.2):

Утверждение 3. *$K'L'M'N'$ – прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям $ABCD$.*

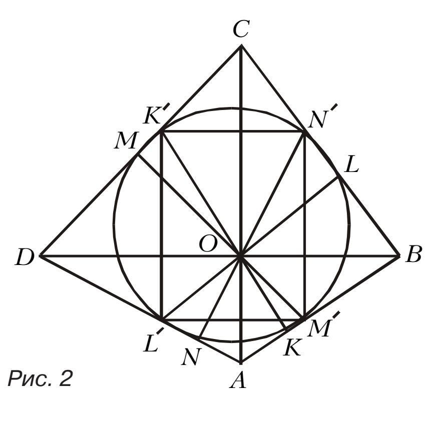

Рис. 2