вестные h и m. Так как $h^2 = l^2 - m^2$ и $m = a\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}$, то после несложных преобразований получим

$$\frac{r}{R} = \frac{2(kl-a)a}{\left(a^2+l^2\right)k^2},\ \text{где}\ k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части равенства, разделим на l^2. Учитывая, что $\frac{a}{l} = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, будем иметь

$$\frac{r}{R} = \frac{2\left(k - \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)k^2}.$$

А так как $\frac{2\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \sin\gamma$ и $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$, окончательно получим

$$\frac{r}{R} = \frac{l\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2}.$$

Задача 3. *Радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, в три раза больше радиуса вписанной сферы. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды.*

Решение. Воспользуемся формулой, полученной при решении задачи 2:

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2},\ \text{где}\ k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Согласно условию задачи имеем

$$3(k\sin\gamma + \cos\gamma - 1) = k^2.$$

Для решения этого уравнения выразим $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ через $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$. Обозначим $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = x$, получим

$$\left(6+k^2\right)x^2 - 6kx + k^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\left(3 \pm \sqrt{3-k^2}\right)k}{6+k^2}.$$

При $n = 3$ получим: $k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $x = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно, $\gamma = 60°$ и пирамида является правильным тетраэдром.

Если $n = 4, 5, 6, \ldots$, то $k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n} < \sqrt{3}$, и уравнение имеет два положительных корня, удовлетворяющих условию задачи:

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(3 \pm \sqrt{3-k^2}\right)k}{6+k^2}.$$

Используя соотношение задачи 1, найдем, что

$$\cos\beta = \frac{3 \pm \sqrt{3-k^2}}{6+k^2}.$$

Аналогично, с использованием формул задачи 2, решается следующая задача.

Задача 4. *Найдите величину двугранного угла при основании правильной n-угольной пирамиды, у которой центры вписанной и описанной сфер симметричны относительно плоскости основания.*

Указание. Центры сфер симметричны относительно плоскости основания тогда и только тогда, когда $h + r = R$, или $\frac{h}{R} + \frac{r}{R} = 1$. Получаем уравнение

$$\left(2+k^2\right)\cos\gamma + k\sin\gamma - 2 = 0.$$

Вычислив $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, воспользуйтесь формулой задачи 1: $\cos\beta = \frac{1}{k}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, и установите, что

$$\cos\beta = \frac{1+\sqrt{5+k^2}}{4+k^2}.$$

Задача при любом n имеет решение, так как $\sqrt{5+k^2} < 3 + k^2$.

Задача 5. *Докажите, что расстояние d между центрами вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды выражается формулой*

$$d = R\frac{\left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Указание. Пусть N – вершина правильной пирамиды, I – центр вписанной сферы и O – центр описанной сферы. Тогда $NI = h - r$, $NO = R$ и $d = IO = |NO - NI| = |R + r - h|$.

Остается воспользоваться формулами задачи 2 и выполнить несложные преобразования.

Из формулы

$$d = \frac{R\left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

следует, что $d = 0$ (т.е. центры вписанной и описанной сфер совпадают) тогда и только тогда, когда $\gamma = \frac{\pi}{n}$ (аналитическое доказательство теоремы 1).

Как известно, в случае тетраэдра $\frac{R}{r} \geq 3$, причем $\frac{R}{r} = 3$ тогда и только тогда, когда тетраэдр правильный.

Выясним, каково аналогичное свойство правильной пирамиды.

Воспользуемся формулой

$$\frac{R}{r} = \frac{k^2}{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1},\ 0 < \gamma < \frac{2\pi}{n}.$$

Легко проверить истинность тождества

$$(k\sin\gamma + \cos\gamma)^2 + (k\cos\gamma - \sin\gamma)^2 = 1 + k^2,$$

откуда

$$k\sin\gamma + \cos\gamma \leq \sqrt{1+k^2}.$$

Значит,

$$\frac{R}{r} \geq \frac{k^2}{\sqrt{1-k^2} - 1} = 1 + \sqrt{1+k^2} = 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причем равенство достигается только тогда, когда

$$k\cos\gamma - \sin\gamma = 0,\ \text{или}\ \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n},$$

т.е. $\gamma = \frac{\pi}{n}$. Таким образом, получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной сфер правильной n-угольной пирамиды. Тогда*

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

В заключение предлагаем еще несколько задач о правильной пирамиде, вписанной в сферу, для самостоятельного решения. Особое внимание следует обратить на выполнение чертежа. Заметим, что часто можно обойтись без изображения сферы. При решении большинства задач достаточно простроить диаметр MN описанной около пирамиды сферы и рассмотреть прямоугольный треугольник AMN, где A – любая вершина основания (см. рис.3).

Задача 6. *Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, совпадает с центром основания пирамиды. Найдите отношение радиуса R этой сферы к радиусу r вписанной в пирамиду сферы.*

Указание. Пусть $NABC$ – данная правильная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности с центром I на высоте пирамиды, касающейся сторон угла AKN (рис.4). Так как KI – биссектриса треугольника HKN,