сферы есть точка пересечения высоты NH пирамиды и биссектрисы угла NKH ($\angle NKH$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды).

Введем дополнительно следующие обозначения: $IH = r$, $NK = l$, $HK = m$, $\angle HKN = \beta$ и $\angle A_1NA_2 = \gamma$. Тогда имеем: $\frac{m}{l} = \cos\beta$, $\frac{r}{h-r} = \cos\beta$ (так как KL – биссектриса угла треугольника HKN, то $\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l}$), $r = m\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $h = m\operatorname{tg}\beta$, $a = 2m\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $a = 2l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Пусть теперь $NA_1A_2\ldots A_n$ – правильная n-угольная пирамида, у которой центры O и I описанной и вписанной сфер совпадают. Тогда $A_1L = A_2L = NL$, как проекции равных наклонных IA_1, IA_2, IN. Значит, L – центр окружности, описанной около треугольника NA_1A_2, и поэтому $\angle A_1NA_2 = \frac{1}{2}\angle A_1LA_2$ (вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу). Поскольку I – центр вписанной сферы, то $IH = IL$. Значит, $KH = KL$ и $\angle A_1HA_2 = \angle A_1LA_2$ (поворотом вокруг оси A_1A_2 на угол β эти углы совмещаются). Следовательно, $\angle A_1NA_2 = \frac{\pi}{n}$. Тем самым доказано замечательное свойство пирамиды:

Теорема 1. *Если в правильной n-угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают, то плоский угол при вершине пирамиды равен* $\frac{\pi}{n}$, *т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна* π.

Предлагаем читателю обратную теорему доказать самостоятельно.

Форма правильной n-угольной пирамиды определяется заданием одного из ее угловых элементов. Например, если известен угол α наклона бокового ребра к плоскости основания, то можно вычислить величину плоского угла γ при вершине пирамиды, или отношение высоты пирамиды к стороне основания и т.д. В таком случае говорят, что пирамида определена с точностью до подобия. Если задан один из углов и, кроме того, один линейный элемент пирамиды, то можно вычислить любые другие ее элементы. Например, если известны радиус R описанной сферы и угол α, то его высоту найдем прямым счетом: $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin\alpha$, следовательно, $h = 2R\sin^2\alpha$ при любом n.

Приведем примеры более трудных задач, в которых раскрываются свойства правильной n-угольной пирамиды.

Задача 1. *Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом* α, *двугранный угол при основании равен* β, *плоский угол при вершине равен* γ. *Докажите, что*

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Пусть AB – сторона основания правильной n-угольной пирамиды, NH – высота пирамиды, LK – ее апофема (рис.3). Тогда $\angle NAH = \alpha$, $\angle NKH = \beta$, $\angle ANB = \gamma$ и $\angle AHB = \frac{2\pi}{n}$.

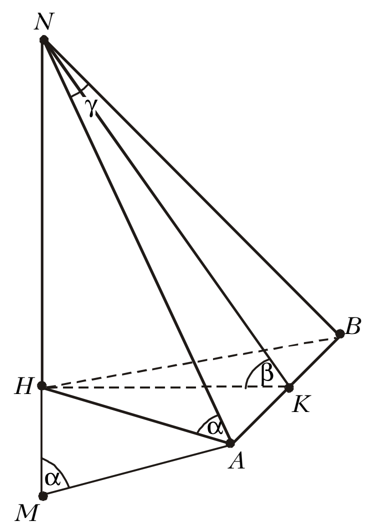

Рис. 3

Из прямоугольных треугольников ANH и ANK, имеющих общую гипотенузу $AN = b$, находим

$$AH = b\cos\alpha,\ AK = b\sin\frac{\gamma}{2}.$$

А так как $AK = AH\sin\frac{\pi}{n}$, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Аналогично найдем соотношение между углами β и γ. Имеем:

$$HK = l\cos\beta,\ AK = l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

где $l = KN$. А так как $HK = NK\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, то $\cos\beta = = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Прежде чем знакомиться с решением следующей задачи, предлагаем читателю самостоятельно решить ее для частного случая, полагая $n = 3$ или $n = 4$.

Задача 2. *Пусть r и R – радиусы вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды, h – ее высота,* γ *– плоский угол при вершине пирамиды. Докажите, что*

$$\frac{h}{R} = \frac{\left(1+k^2\right)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2},$$

где $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Решение. Применим способ введения вспомогательного угла. Пусть $\angle NAH = \alpha$ (см. рис.3). Тогда

$$h = 2R\sin^2\alpha = 2R\left(1-\cos^2\alpha\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Получим

$$h = 2R\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right).$$

Выполним несложные преобразования:

$$2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1-\cos\gamma,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{n} = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\cos^2\frac{\pi}{n} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}} = \frac{k^2}{1+k^2},$$

и выражение для h приводится к виду

$$h = 2R\left(1 - \frac{\left(1+k^2\right)(1-\cos\gamma)}{2k^2}\right),$$

откуда

$$\frac{h}{k} = \frac{\left(1+k^2\right)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2}.$$

Для доказательства второго соотношения введем вспомогательные отрезки. Обозначим $AB = 2a$, $NK = l$, $HK = m$, $NH = h$.

Из треугольников AMN и AKN находим: $b^2 = 2Rh$ и $b^2 = a^2 + l^2$. Отсюда

$$R = \frac{a^2 + l^2}{2h}.$$

Так как KI – биссектриса треугольника HKN, то

$$\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l},\ \text{откуда}\ r = \frac{hm}{l+m}.$$

Таким образом,

$$\frac{r}{R} = \frac{2h^2m}{(l+m)\left(a^2+l^2\right)}.$$

Из правой части полученного равенства исключим вспомогательные неиз-