Свойства правильной пирамиды, вписанной в сферу

Э.ГОТМАН

ОДНИМ из замечательных свойств правильной пирамиды является ее симметричность. Правильный тетраэдр симметричен относительно плоскости, проходящей через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра, и значит, имеет шесть плоскостей симметрии. При симметрии относительно прямой, проходящей через середины противоположных ребер, концы этих ребер меняются местами и правильный тетраэдр переходит в себя. Следовательно, тетраэдр имеет еще три оси симметрии.

Основанием правильной пирамиды служит правильный n-угольник, который имеет n осей симметрии (рис.1).

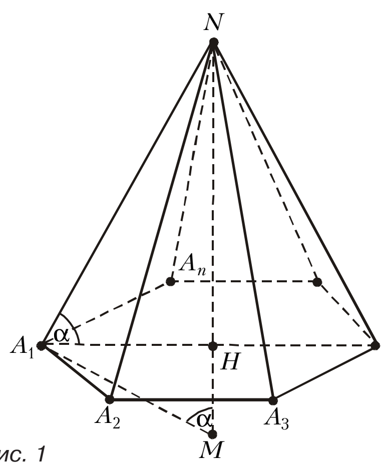

Рис. 1

Все оси пересекаются в центре многоугольника. Правильный n-угольник имеет еще и другие элементы симметрии. Каждая вершина его переходит в соседнюю при повороте вокруг центра на угол $\frac{2\pi}{n}$ и после n таких последовательных поворотов возвращается в исходное положение. Говорят, что правильный n-угольник обладает поворотной симметрией n-го порядка.

Пусть NH – высота правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$, точка H – центр ее основания. Ясно, что каждая плоскость, проходящая через прямую NH и ось симметрии правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды, является плоскостью симметрии пирамиды, и потому правильная n-угольная пирамида имеет n плоскостей симметрии.

При поворотах на углы $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, \ldots, n$, вокруг прямой NH правильная пирамида также переходит в себя и, следовательно, обладает еще поворотной симметрией порядка n. В частности, правильный тетраэдр, кроме перечисленных выше элементов симметрии, имеет четыре оси симметрии третьего порядка, каждая из которых проходит через одну из вершин и центр противоположной грани.

Правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии и ось поворотной симметрии четвертого порядка.

Как известно, около всякой правильной пирамиды можно описать сферу и в нее можно вписать сферу. При повороте пирамиды вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) точки оси, и только они, остаются на месте, вершины же основания переходят в другие вершины, а пирамида переходит в себя. В себя переходят также сферы, описанная и вписанная. Значит, их центры – неподвижные точки, лежащие на оси NH. Рассмотрим подробнее расположение центров этих сфер относительно пирамиды.

Центр описанной сферы одинаково удален от вершин основания и поэтому лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр основания, т.е. на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H. Если продолжение высоты NH пересекает сферу в точке M, то MN – диаметр сферы и, следовательно, $\angle MA_1N = 90^\circ$. Центр описанной сферы совпадает с точкой H, когда $\angle NA_1H = 45^\circ$, он лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении в зависимости от того, будет ли $\angle NA_1H$ меньше или больше 45°.

Введем обозначения: $MN = 2R$, $A_1A_2 = a$, $NA_1 = b$, $NH = h$, $A_1H = R_1$, $\angle NA_1H = \alpha$. Учитывая, что A_1H – высота прямоугольного треугольника A_1MN, проведенная к его гипотенузе, получим соотношения, которыми удобно пользоваться при решении задач на вычисление элементов правильной пирамиды: $b^2 = 2Rh$, $R_1^2 = (2R-h)h$, $a = 2R_1\sin\frac{\pi}{n}$, $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin a$, $R_1 = b\cos\alpha$.

Центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды на ее высоте. Пусть NK – апофема правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$ (на рисунке 2 изображена лишь часть пирамиды). Поскольку $NK \perp A_1A_2$ и $NH \perp A_1A_2$, то ребро

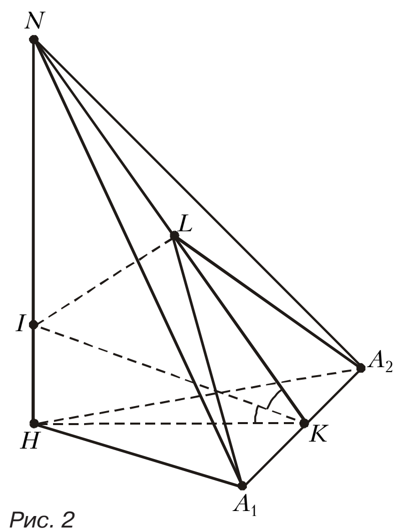

Рис. 2

A_1A_2 перпендикулярно плоскости NHK в силу теоремы о двух перпендикулярах. Проведем биссектрису угла HKN, она пересечет высоту NH в точке, которую обозначим через I. Докажем, что I – центр сферы, вписанной в пирамиду.

Проведем перпендикуляр IL к апофеме NK. Тогда $IL = IH$, и сфера радиусом IL с центром I касается основания пирамиды в точке H. Она касается также боковой грани NA_1A_2. Это следует из того, что $IL \perp A_1A_2$ и $IL \perp NK$. Значит, плоскость NA_1A_2 перпендикулярна радиусу IL и касается сферы в точке L. Поскольку при поворотах вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) грань NA_1A_2 пирамиды переходит во все другие грани, а точка I остается неподвижной, то расстояния от точки I до всех граней пирамиды одинаковы и равны IL, т.е. сфера с центром I и радиусом IH является вписанной в пирамиду. Центр I