Алгебраические и трансцендентные числа

Подобно тому, как капля росы способна играть в лучах восходящего солнца всеми цветами радуги, так и числа являют нам свои бесчисленные свойства в зависимости от того, под каким углом зрения на них посмотреть. Мы различаем целые числа и дробные, положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, вещественные и комплексные... Если взглянуть на числа с точки зрения: могут или не могут они являться корнями многочленов с целыми коэффициентами, то тем самым мы проведем границу между *алгебраическими* числами (могут быть корнями) и *трансцендентными* (не могут). Таким образом, о трансцендентных числах можно сказать еще и так: они выходят за пределы множества чисел, представляющих корни всевозможных многочленов с целыми коэффициентами (по-латински *transcendentis* означает *выходящий за пределы*). Называть числа *алгебраическими* и *трансцендентными* предложил Леонард Эйлер (1707–1783) в далеком 1775 году, когда еще не было известно ни одного трансцендентного числа.

Все рациональные числа m/n, где m, n – целые, $n \neq 0$, – безусловно алгебраические, поскольку удовлетворяют уравнению $nx - m = 0$. Сообщество алгебраических чисел гораздо богаче, чем общество рациональных – оно включает также все иррациональные числа вида $\sqrt[n]{m}$ (n, m – целые, $n \geq 2$), поскольку $\sqrt[n]{m}$ – корень многочлена $x^n - m$. Сумма, разность, произведение и частное (при ненулевом делителе) алгебраических чисел – числа также алгебраические. Более того, оказалось, что алгебраическими числами являются корни многочленов, коэффициенты которых – алгебраические числа. Это свойство позволят конструировать алгебраические числа весьма затейливого вида. Так, число $\sqrt{\dfrac{1998}{\sqrt[19]{98} - \sqrt[199]{8}}}$ алгебраическое, потому что собрано, как из деталей детского конструктора, из алгебраических чисел с помощью основных арифметических операций и радикалов. Существуют такие многочлены, корни которых через их коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов *вовсе не выражаются*. Этот факт в истории математики связан с драматическим поиском формул, выражающих корни многочленов высоких степеней через их коэффициенты, и достоин отдельного повествования. Здесь же мы отметим, что он открывает необозримую ширь множества алгебраических чисел. Если это множество столь неохватно, что для изображения всех их не хватает даже привычных знаков операций, то где же могут обитать трансцендентные числа?

В 1744 году Леонард Эйлер выдвинул гипотезу, что числа вида $\log_a b$ почти при всех рациональных a и b не могут быть корнями многочленов с целыми коэффициентами (на самом деле, число $\log_a b$ рационально тогда и только тогда, когда существует рациональное число t такое, что $a = t^n$, $b = t^m$, где m и n – целые числа). Это предположение длительное время оставалось хотя и весьма правдоподобной, но все же зыбкой гипотезой. Более ста лет математикам не удавалось ни доказать гипотезу Эйлера, ни найти хоть какое-нибудь трансцендентное число. Поиски трансцендентных чисел напоминали поиски в темной комнате кота, причем без надлежащей уверенности в том, что усатый и полосатый в этой комнате непременно есть. Первый свет забрезжил в 1844 году, когда французский математик Жозеф Лиувилль (1809–1882) не только доказал, что трансцендентные числа существуют, но и построил примеры таких чисел. Точнее, он доказал, что алгебраические числа плохо приближаются рациональными, а именно, если α — алгебраическое число степени n (где n – наименьшая степень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами такого, что $P(\alpha) = 0$), то для любой