И так как $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ для $n \geq 3$, верхняя оценка для $f\left(2^n\right)$ получена.

Чтобы получить нижнюю оценку, докажем сначала, что

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a), \qquad (4)$$

если $b \geq a \geq 0$ – целые числа одинаковой четности. Действительно, если a и b четны, то из (1) следует, что каждая часть неравенства (4) обращается в нуль, а если они оба нечетны, то из (2) следует, что $f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right)$ и $f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$. Остается вспомнить, что f не убывает.

Возьмем произвольные натуральные $r \geq k$, r – четное, и подставим в равенство (4) $a = r - j$, $b = r + j$ для $j = 0, \ldots, k-1$. Сложив полученные неравенства, получаем

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1).$$

Так как r четно, то $f(r+1) = f(r)$, и следовательно,

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r) \text{ для } k = 1, \ldots, r.$$

Суммируя эти неравенства для $k = 1, \ldots, r$, мы получаем, что

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geq 2rf(r).$$

В силу равенства (3) левая часть равна $f(4r) - 1$. Поэтому

$$f(4r) \geq 2rf(r) + 1 > 2rf(r).$$

Возьмем $r = 2^{m-2}$. Тогда

$$f\left(2^m\right) > 2^{m-1} f\left(2^{m-2}\right). \qquad (5)$$

($r = 2^{m-2}$ четно при $m > 2$, $m \in \mathbf{N}$; заметим, однако, что (5) справедливо и при $m = 2$.)

Наконец, пусть $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$. Если l – положительное целое такое, что $2l \leq n$, то, применяя неравенство (5) к $m = n, n-1, \ldots, n-2l+2$, получим, что

$$f\left(2^n\right) > 2^{n-1} \cdot f\left(2^{n-2}\right) >$$

$$> 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f\left(2^{n-4}\right) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} \cdot f\left(2^{n-6}\right) > \ldots$$

$$\ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2l+1)} \cdot f\left(2^{n-2l}\right) = 2^{l(n-l)} \cdot f\left(2^{n-2l}\right).$$

Теперь, взяв $l = \frac{n}{2}$, если n четно, или $l = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно, получаем

$$f\left(2^n\right) > 2^{n^2/4} \cdot f\left(2^0\right) = 2^{n^2/4}, \; n \text{ – четно};$$

$$f\left(2^n\right) > 2^{\left(n^2-1\right)/4} \cdot f\left(2^1\right) = 2^{\left(n^2-1\right)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4}, \; n \text{ – нечетно}.$$

Нужный результат доказан для $n \geq 2$. Непосредственно проверяется, что и для $n = 1$ соответствующее неравенство справедливо.

Публикацию решений задач М1628–М1630 подготовил Д.Терешин

Ф1638. *Маленький упругий шарик подпрыгивает, ударяясь о горизонтальную подставку, при этом высота подскоков равна H. Подставку очень медленно сдвигают параллельно самой себе на h вниз и останавливают. Найдите новую высоту, на которую шарик будет подпрыгивать относительно подставки после ее остановки.*

Если подставка движется с постоянной скоростью, то высота подскока с течением времени не меняется. Для того чтобы это понять, достаточно перейти в систему отсчета, которая движется вместе с подставкой. При очень малой скорости движения подставки (как в условии задачи) высота подскока останется равной H.

Тут возникает вопрос: если шарик движется с подставкой вниз и при этом теряет потенциальную энергию, почему же не возрастает его кинетическая энергия (высота подскока связана именно с ней)? Оценим потери энергии шарика при ударе о подставку, которая движется вниз со скоростью u (если бы подставка двигалась вверх, то энергия шарика при ударах возрастала бы). Если скорость шарика перед ударом была v, то после удара о тяжелую подставку его скорость будет направлена вверх и равна $v - u$ относительно подставки и $v - 2u$ относительно неподвижной системы координат. Тогда потеря кинетической энергии шарика при ударе составит $mv^2/2 - m(v-2u)^2/2 = 2mvu - 2mu^2 \approx 2mvu$. За время $\tau \approx 2v/g$ до следующего удара подставка сдвинется вниз на $\Delta h = \tau u = 2vu/g$, и шарик «потеряет» потенциальную энергию $mg\Delta h = 2mvu$. Видно, что «добавка» за счет уменьшения потенциальной энергии равна потере кинетической энергии – но «потерянную» энергию шарик как раз и передает подставке.

А.Зильберман

Ф1639. *Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с массивным поршнем находится в вакууме (рис.1). Пружина жесткостью k, закрепленная с одной стороны, упирается в поршень. В начальном положении газа под поршнем нет, пружина не деформирована. Через дырку в дне сосуда в него впускают некоторое количество гелия и закрывают дырку. После установления равновесия пружина оказалась деформированной на L. Затем газ очень медленно нагревают, пока поршень не сдвигается еще на L. Какое количество теплоты получил газ при этом? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.*

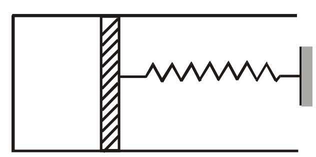

Рис.1

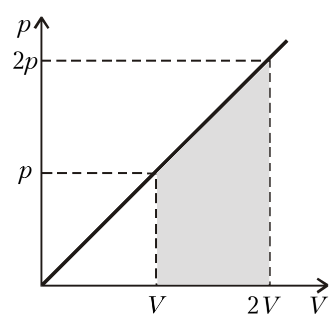

Рис.2

Работа газа при нагреве – это работа по деформации пружины от L до $2L$ (рис.2):

$$A = \frac{k(2L)^2}{2} - \frac{kL^2}{2} = \frac{3kL^2}{2} = \frac{3pV}{2}.$$