Конструкция первой из этих таблиц несложным образом обобщается: если A – серебряная таблица $n \times n$, то построим таблицу D размерами $2n \times 2n$ так: $D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$, где таблица B получена из A добавлением $2n$ к каждому ее элементу, а C получена из B заменой всех ее элементов, стоящих на главной диагонали, на $2n$. Таблица D будет серебряной. Действительно, пусть $i \le n$ (другой случай разбирается аналогично). Рассмотрим i-й крест таблицы D. Он состоит из i-го креста A, i-й строки B и i-го столбца C; i-й крест A содержит числа 1, 2, …, $2n - 1$, а i-я строка B и i-й столбец C содержат числа $2n$, $2n + 1$, …, $4n - 1$.

Замечания

1. Серебряные таблицы существуют для всех четных n.
2. Приведем еще один способ построения серебряной таблицы $2^n \times 2^n$. Для целых неотрицательных чисел a и b обозначим через $a \oplus b$ число, полученное следующим образом: запишем a и b в двоичной системе счисления, добавив, если это необходимо, слева нули так, чтобы число разрядов совпадало; затем сложим числа «в столбик», но не учитывая переносов, т.е. поразрядно, а результат вновь запишем в десятичной системе. Например: $7 \oplus 9 = 14$, так как $7 = 111_2$, $9 = 1001_2$,

$$\begin{array}{l} 0111_2 \\ \underline{1001_2} \\ 1110_2 \end{array}, \quad 1110_2 = 14.$$

Занумеруем числами от 0 до $2^n - 1$ строки и столбцы таблицы (сверху вниз и слева направо соответственно). Запишем в клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца число

$$a_{ij} = \begin{cases} i \oplus j + 1 \text{ при } j \le i, \\ i \oplus j + 2^n \text{ при } j > i. \end{cases}$$

Полученная таблица будет серебряной.

М1629. *Найдите все пары (a, b) целых чисел $a \ge 1$, $b \ge 1$, удовлетворяющих уравнению*

$$a^{\left(b^2\right)} = b^a.$$

Из равенства $a^{b^2} = b^a$ следует, что $a = b^{a/b^2}$. Пусть $\frac{a}{b^2} = \frac{k}{l}$, где $(k, l) = 1$. Тогда $a = b^{k/l}$, $\left(b^{k/l}\right)^{b^2} = b^{\left(b^{k/l}\right)}$,

$$b^{kb^2/l} = b^{b^{k/l}}. \qquad (1)$$

Если $b = 1$, то и $a = 1$. Если же $b > 1$, то из (1) вытекает, что $\frac{k}{l} b^2 = b^{k/l}$, т.е.

$$\frac{k}{l} = b^{k/l-2}. \qquad (2)$$

1-й случай: $k - 2l \ge 0$. Тогда из (2) следует, что $\frac{k}{l}$ – целое, поэтому $l = 1$ (так как $(k, l) = 1$), т.е. $a = b^k$,

$$k = b^{k-2}. \qquad (3)$$

Из неравенства $b^{k-2} \ge 2^{k-2} > k$ при $k \ge 5$ получаем, что (3) возможно лишь при $k < 5$. Перебором убеждаемся, что $k = 4$, $b = 2$, $a = 16$ или $k = 3$, $b = 3$, $a = 27$.

2-й случай. $k - 2l < 0$. Из (2) получаем, что $\frac{l}{k} = b^{2-k/l}$, где $2 - \frac{k}{l} > 0$, т.е. $k = 1$. Тогда $b = a^l$, $a^{a^{2l}} = a^{al}$, $a^{2l-1} = l$, следовательно, $l \ge 2^{2l-1}$, что невозможно при $l \ge 2$.

Ответ: $\{(1, 1); (16, 2); (27, 3)\}$.

М1630. *Для любого натурального числа n обозначим через $f(n)$ число способов представления числа n в виде суммы целых неотрицательных степеней числа 2. Преставления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Например, $f(4) = 4$, так как число 4 может быть представлено следующими четырьмя способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + + 1 + 1. Докажите, что для любого целого числа $n \ge 3$ $2^{n^2/4} < f\left(2^n\right) < 2^{n^2/2}$.*

Если $n = 2k + 1$ – любое нечетное число, большее 1, то каждое его представление в требуемом по условию задачи виде содержит 1 в качестве слагаемого. Убрав эту единицу, мы получим представление числа $2k$. Верно, очевидно, и обратное. Следовательно,

$$f(2k+1) = f(2k). \qquad (1)$$

Если $n = 2k$ – любое четное число, то каждое его представление в требуемом виде принадлежит к одному из двух типов: либо оно содержит слагаемое 1, либо не содержит таких слагаемых. В первом случае, убрав одно слагаемое 1, мы получим представление числа $2k - 1$. Как и выше, легко заметить, что есть взаимно однозначное соответствие между всеми представлениями числа $2k - 1$ и представлениями числа $2k$ первого типа. Во втором случае мы можем разделить все слагаемые на 2 и получить представление числа k. Это соответствие также взамно однозначно. Итак,

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k). \qquad (2)$$

Обе полученные формулы выполнены для всех натуральных $k \ge 1$. Очевидно, что $f(1) = 1$. Пусть по определению $f(0) = 1$, тогда формула (1) выполнена и при $k = 0$. Заметим еще, что из (1) и (2) следует, что $f(n)$ не убывает.

Согласно (1), число $f(2k - 1)$ в (2) можно заменить на $f(2k - 2)$, откуда

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k) \text{ для } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Суммируя эти равенства от 1 до n, получаем, что

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n), \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

В правой части (3) каждое слагаемое не больше последнего, а так как $2 = f(2) \le f(n)$ для $n \ge 2$, то

$$f(2n) = 2 + \left(f(2) + \ldots + f(n)\right) \le 2 + (n-1)f(n) \le$$

$$\le f(n) + (n-1)f(n) = nf(n) \text{ для } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Следовательно,

$$f\left(2^n\right) \le 2^{n-1} \cdot f\left(2^{n-1}\right) \le 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f\left(2^{n-2}\right) \le \ldots$$

$$\ldots \le 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$