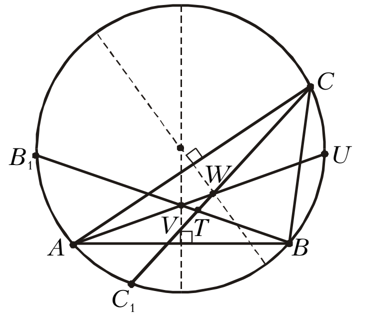

Рис.1

тельно серединного перпендикуляра к стороне AB имеем $AU = BB_1$. Аналогично, $AU = CC_1$. Следовательно, $BB_1 = CC_1$, а значит, и $TB = TC_1$ (BCB_1C_1 – равнобокая трапеция!). Тогда $TB + TC = TC_1 + TC = CC_1 = AU$, что и требовалось.

Замечание

1. Задача имеет много других решений. Участники олимпиады в основном использовали тригонометрию и аналитическую геометрию.

2. Если отказаться от требования минимальности угла A, то (при условии, что прямые BV и CW действительно пересекаются, а не параллельны) справедливо следующее утверждение: из отрезков AU, TB и TC один равен сумме двух других. Например, в ситуации, изображенной на рисунке 2, $TB = AU + TC$.

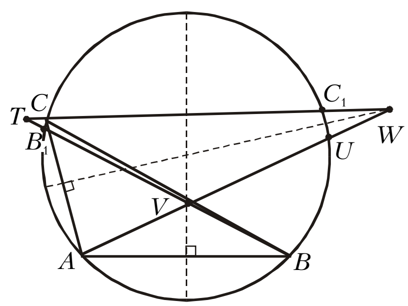

Рис.2

3. Если $\angle A = 30°$, а O – центр окружности, описанной около ΔABC, то $|BT - CT| = OT$ (докажите это самостоятельно).

Д.Терешин

М1627. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа, удовлетворяющие условиям*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$$

и

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажите, что существует перестановка $y_1, y_2, \ldots, x_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

Допустим, что требуемой перестановки не существует, т.е. для любой перестановки выполнено неравенство $|s| = |y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| > \frac{n+1}{2}$. Изменив, если это необходимо, знаки чисел и их нумерацию, мы можем считать, что $x_1 + \ldots + x_n = 1$ и $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Рассмотрим перестановки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. Пусть $S_1 = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$, $S_2 = x_n + 2x_{n-1} + \ldots$ $\ldots + nx_1$. Легко понять, что $S_2 \ge S_1$. Действительно, если в наборе $y_1, \ldots, y_n$ поменять местами y_k и y_{k+1}, то при $y_{k+1} \ge y_k$ получим $S'_{k+1} - S'_k = (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_k + (k+1)y_{k+1} + \ldots + ny_n) - (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_{k+1} + (k+1)y_k + \ldots + ny_n) = y_{k+1} - y_k \ge 0$. Поэтому, если мы последовательно поменяем местами x_1 с x_2, x_1 с x_3, …, x_1 с x_n, затем x_2 с x_3, …, x_2 с x_n, …, x_{n-1} с x_n, то из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получим $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$, причем на каждом шаге рассматриваемая нами сумма не уменьшалась.

Заметим теперь, что $S_1 + S_2 = (n+1)(x_1 + \ldots + x_n) = n + 1$, поэтому $S_2 \ge \frac{n+1}{2} \ge S_1$. Но, согласно предположению, $|S_1| > \frac{n+1}{2}$ и $|S_2| > \frac{n+1}{2}$, следовательно, $S_2 > \frac{n+1}{2}$, а $S_1 < -\frac{n+1}{2}$.

С другой стороны, $|S'_{k+1} - S'_k| = |y_{k+1} - y_k| \le |y_{k+1}| + |y_k| \le n + 1$. Поэтому, если $S'_k > \frac{n+1}{2}$, то и $S'_{k+1} > \frac{n+1}{2}$ (иначе, если $S'_{k+1} < -\frac{n+1}{2}$, то $|S'_{k+1} - S'_k| > n + 1$). Но $S_2 > \frac{n+1}{2}$, значит, в результате наших перестановок мы получим $S_1 > \frac{n+1}{2}$, что противоречит полученному ранее неравенству $S_1 < -\frac{n+1}{2}$. Итак, наше предположение неверно, и искомая перестановка существует.

О.Богопольский

М1628. *Таблица $n \times n$, заполненная числами из множества $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, называется серебряной, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ объединение i-й строки и i-го столбца содержит все числа из S.*

Покажите, что:

а) не существует серебряной таблицы для $n = 1997$;

б) серебряные таблицы существуют для бесконечного числа значений n.

а) Пусть $n > 1$ – натуральное число. Предположим, что серебряная таблица $n \times n$ существует. Пусть k – элемент из множества $[1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, который не стоит на главной диагонали таблицы (такой элемент найдется, так как $n < 2n - 1$). Назовем объединение i-го столбца и i-й строки таблицы i-м крестом. Число k появляется в каждом кресте ровно один раз. Если k стоит на пересечении i-го столбца и j-й строки, то оно входит и в i-й и в j-й крест. Будем говорить, что эти кресты k-связаны. Таким образом, все n крестов разбиваются на пары k-связных, т.е. n – четное число. Но 1997 – число нечетное.

б) При $n = 2$ таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ является серебряной. Из нее легко получить серебряную таблицу 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$