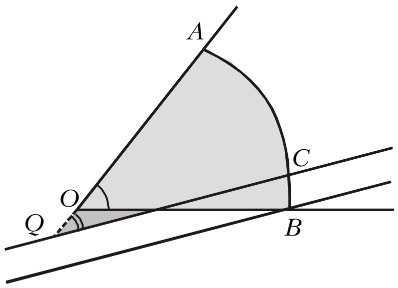

Рис. 23

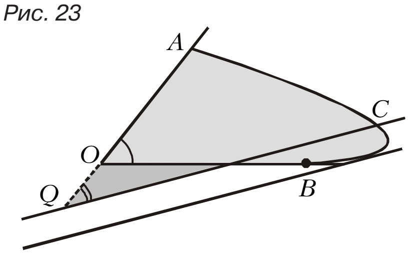

Рис. 24

стала опорной прямой фигуры F (рис. 23, 24). Поскольку от кривой AB будет отрезан кусочек не меньший, чем ширина полосы, то задача будет сведена к покрытию оставшимися полосами фигуры, ограниченной отрезками AQ, QC и кривой CA.

Решение задачи М1600 теперь очевидно (рис. 25): верхняя полуокружность и два вертикальных отрезка образуют кривую длиной $\pi+2$. Круг радиуса 1 заключен между этой кривой и горизонтальной прямой, которую мы представим как две стороны развернутого угла с вершиной O.

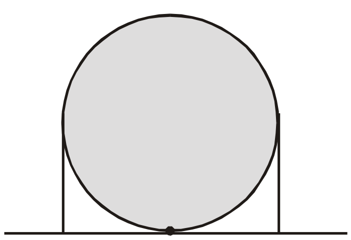

Рис. 25

Гипотеза о покрытиях

Итак, число 100 в формулировке М1600 можно заменить на $2+\pi$. Было бы интересно выяснить, можно ли заменить его на число π. Еще интереснее узнать, верна ли следующая гипотеза.

Гипотеза. *Любую выпуклую фигуру с периметром P можно покрыть параллельными сдвигами любых полос, сумма ширин которых равна половине периметра фигуры.*

Рассмотрим два частных случая: квадрат и шестиугольник.

Покрытия квадрата двумя полосами

Квадрат со стороной 1 невозможно покрыть вертикальной и горизонтальной полосами, ширины которых меньше 1 (рис.26).

Задача 4. *Если сумма ширин двух полос равна 2, то любой квадрат со стороной 1 можно покрыть параллельными сдвигами этих полос.*

Решение. Обозначим большую из ширин полос буквой w. Очевидно, $w \geq 1$ – в противном случае сумма ширин рассматриваемых полос была бы меньше 2. Перенесем эту полосу так, чтобы один из ее краев стал опорной прямой квадрата (рис. 27).

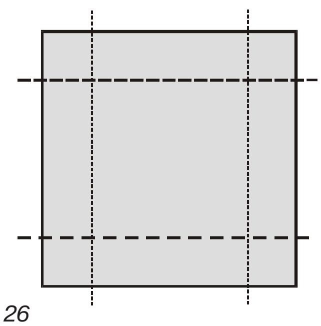

Рис. 26

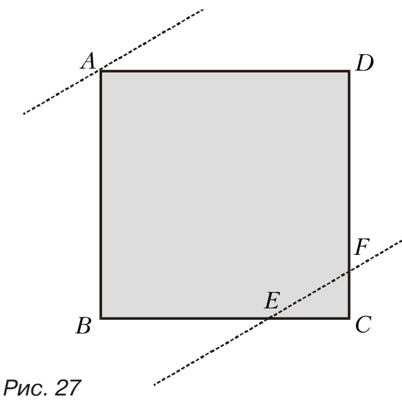

Рис. 27

Докажем, что треугольник EFC можно покрыть второй полосой, т.е. что ширина этого треугольника не превосходит ширины полосы:

$$EF \leq 2-w. \qquad (*)$$

Рассмотрим EF как функцию от w. Легко понять, что эта функция линейная: $EF = kw + b$ при некоторых не зависящих от w величинах k и b.

Значит, неравенство $(*)$ достаточно проверить в крайних точках. При $w=1$ рассмотрим окружность радиусом 1 с центром A (рис. 28). По равенству отрезков касательных, $BE = EK$, $KF = FD$. Следовательно,

$$2EF < (EK+KF)+(EC+CF) =$$
$$= BE+DF+EC+CF = 2,$$

откуда $EF < 1$.

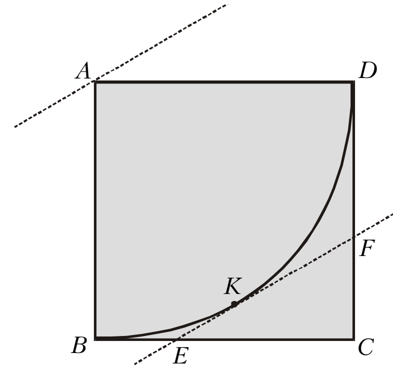

Рис. 28

В другом крайнем случае, когда первая полоса проходит через точку C и целиком покрывает квадрат, $EF = 0$ и неравенство $(*)$ верно.

Покрытие шестиугольника

Полосы рисунка 29 не покрывают шестиугольник. Тем не менее, его можно покрыть их сдвигами (рис.30). Вообще, пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – выпуклый центрально-симметричный шестиугольник.

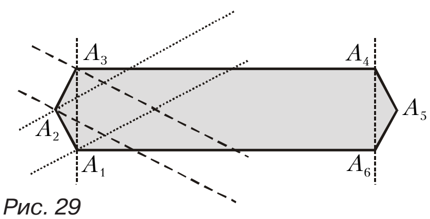

Рис. 29

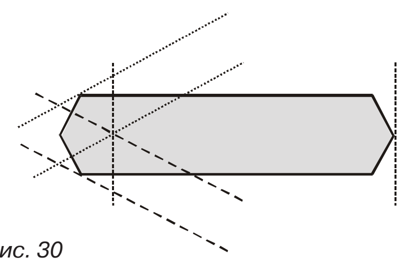

Рис. 30

Оказывается, чтобы покрыть его полосами, образованными перпендикулярами к сторонам A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4, достаточно эти полосы приложить не к «своим» вершинам, а к вершинам A_3, A_1 и A_5 соответственно.

Упражнение 20. Докажите это.

Замечание. Было бы интересно узнать ответ на следующий частный случай гипотезы: *если через концы каждой стороны выпуклого центрально-симметричного многоугольника S проведем перпендикулярные этой стороне прямые и из каждых двух образовавшихся полос одного направления оставим только одну, то всегда ли S можно покрыть сдвигами полученных полос?*

(Продолжение следует)