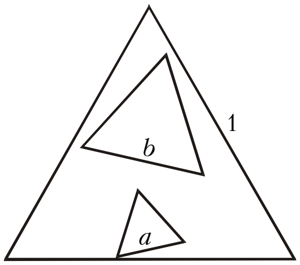

Рис. 6

жены не пересекающие друг друга треугольники, можно провести такую прямую l (рис. 7), что один треугольник окажется по одну сторону от l, а другой – по другую сторону (существование разделяющей прямой l доказано в *Приложении*).

Прямая l разобьет треугольник ABC на две части – треугольник и четырехугольник (который выродится в треугольник, если l пройдет через вершину ΔABC). Пусть, для определенности, $AD \geq BE$.

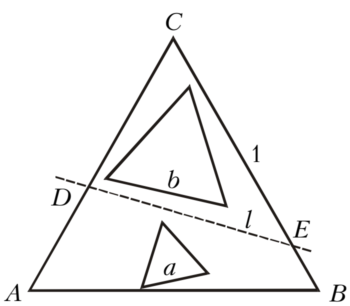

Рис. 7

Проведем через точку D прямые параллельно сторонам AB и BC треугольника ABC. Получим две полосы (рис. 8), одна из которых содержит четырехугольник $ABED$, а другая – треугольник CDE.

Поскольку четырехугольник $ACED$ расположен в полосе шириной $AD\sqrt{3}/2$, для ширины $a\sqrt{3}/2$ правильного треугольника со стороной a выполняется неравенство $a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq AD\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a \leq AD$. Аналогично, правильный треугольник со стороной b лежит в полосе шириной $DB\sqrt{3}/2$. Значит, $b\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq DB\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $b \leq DB$.

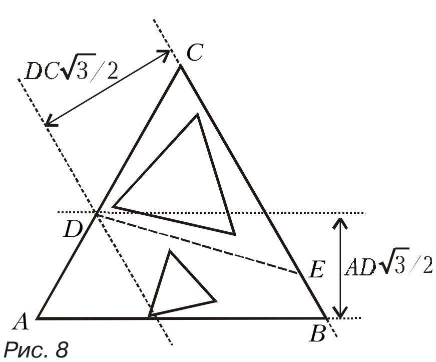

Рис. 8

Итак, $a \leq AD$, $b \leq DC$, откуда $a + b \leq AD + DC = AC$.

Упражнение 9. *Дан треугольник, величина одного из углов которого равна 60°. Разместите в нем равносторонний треугольник наибольшей возможной площади.*

Замечания. В решении задачи 1 использовано очевидное (и важное!) свойство: если некоторая фигура A является подмножеством фигуры B, то ширина A не может быть больше ширины B.

Между прочим, ширина фигуры может совпадать с шириной ее собственной части. Иными словами, от некоторых фигур можно отрезать кусочек, не уменьшив при этом их ширину. Например, ширина прямоугольника $a \times b$, где $a < b$, равна a. Такова же ширина содержащегося в нем квадрата со стороной a. (Ширина вписанного в этот квадрат круга тоже равна a.)

Ширины треугольника CDE и четырехугольника $ABED$ равны ширинам полос рисунка 8 (в решении задачи 1 мы использовали только то, что они не превосходят ширин этих полос). Следовательно, как ни режь правильный треугольник произвольной прямой на две части, сумма ширин частей будет равна ширине треугольника.

Упражнение 10. *Если треугольник не равносторонний, то его можно разрезать прямой на две части, сумма ширин которых больше ширины исходного треугольника.*

Упражнение 11. *Из любого ли неравнобедренного треугольника можно вырезать равнобедренный треугольник той же ширины, что и исходный треугольник?*

Упражнение 12. *а) Если круг разрезан прямой на две части, то сумма ширин этих частей равна ширине (диаметру) круга. б) Сумма диаметров любых двух кругов, расположенных без пересечения в некотором круге, не превосходит его диаметра.*

Упражнение 13. *Квадрат разрезан на две части прямой, не параллельной его сторонам. Докажите, что сумма ширин частей больше ширины (стороны) квадрата.*

Квадраты

Задача 2. *Внутри квадрата разместили два непересекающихся квадрата (рис.9). Докажите, что сумма их сторон не превосходит стороны квадрата.*

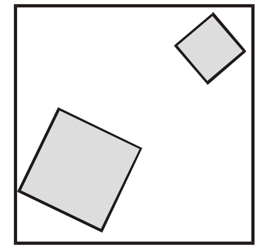

Рис. 9

Решение. Проведем разделяющую прямую. Она разрежет квадрат на треугольник и пятиугольник (рис. 10) или на две трапеции (рис. 11)[2]. Достроим эти фигуры до прямоугольных треугольников и поставим задачу:

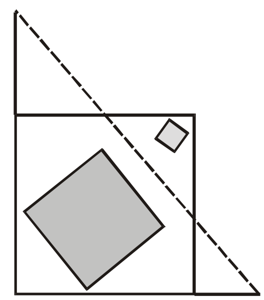

Рис. 10

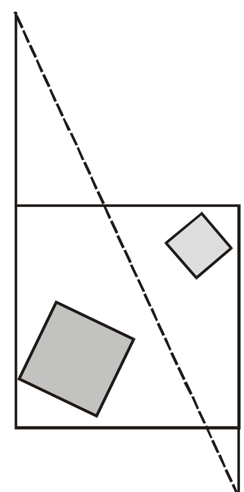

Рис. 11

Задача 3. *В данный прямоугольный треугольник вписать квадрат с наибольшей возможной стороной.*

Решение задачи 3. Интуитивно ясно[3], что все вершины наибольшего квадрата должны лежать на сторонах треугольника. Таким образом, надо рассмотреть два случая: 1) квадрат

[2] *Возможны еще случаи, когда разделяющая прямая проходит через вершину квадрата. Разберите их самостоятельно.*

[3] *На самом деле это — тема для отдельной заметки, которая будет опубликована позже.*