Покрытия полосками

М.СМУРОВ, А.СПИВАК

Полоса – часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми.

На МОСКОВСКОЙ олимпиаде 1997 года одиннадцатиклассники решали задачу, вошедшую в «Задачник «Кванта»:

М1600. *На плоскости даны: конечное число полос, сумма ширин которых равна 100, и круг радиусом 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они вместе покрыли круг.*

С ней справился только один из 410 участвовавших в олимпиаде одиннадцатиклассников. Между тем при обсуждении варианта многие члены жюри, даже не желая слушать условие до конца, заявляли, что задача им известна. Они путали М1600 со знаменитой задачей, о которой будет рассказано во второй части статьи.

Число 100 играло в условии роль «большого числа». Мы докажем, что достаточно меньшей суммарной ширины полос, равной $\pi + 2$.

В то же время, 100 нельзя заменить ни на какое число, меньшее π. Чтобы доказать это, впишем в круг с радиусом 1 правильный $2n$-угольник. Через концы каждой его стороны проведем перпендикулярные ей прямые (рис. 1). Получим n полос. Сумма их ширин равна половине периметра $2n$-угольника. Она стремится к π при возрастании n. Во второй части статьи мы докажем, что если сузить полосы (т.е. уменьшить их ширины), то никакими их сдвигами рассматриваемый $2n$-угольник не покроешь.

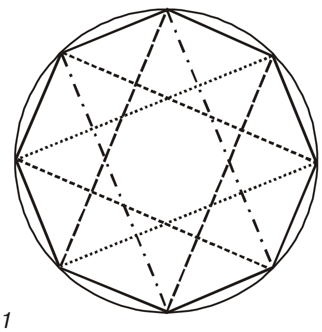

Рис. 1

Впрочем, основное содержание статьи — рассказ о некоторых трудных и интересных проблемах комбинаторной геометрии. Их формулировки привлекательны и просты. Но на многие вопросы еще нет ответа.

Что такое ширина?

Ширина по направлению

Начнем с простой ситуации. Пусть даны фигура F и одна полоса (рис.2). Можно ли полосу параллельно перенести («сдвинуть») так, чтобы накрыть F?

Разумеется, некоторые фигуры (например, угол) вообще не помещаются ни в какую полосу. Поэтому дальше будем предполагать, что фигура F является ограниченной, т.е. содержится в некотором круге. Для таких

Иллюстрация М.Константиновой