Действительно, предположим, что при некотором $x = 2n$ нет ни одного простого числа такого, что $x/2 < p \le x$. Тогда показатель p в разложении числа $A(x)/A(x/2)$, равный количеству натуральных k, удовлетворяющих неравенствам $x/2 < p^k \le x$, будет равен сумме числа решений неравенств $x/2 < p^{2k} \le x$ и числа решений неравенств $x/2 < p^{2k+1} \le x$ в натуральных k. Очевидно, что эта сумма не превосходит удвоенного числа решений неравенства $p^k \le \sqrt{x}$, т.е. не превосходит показателя p в разложении на простые сомножители числа $A^2\left(\sqrt{x}\right)$. Следовательно,

$$A(x)/A(x/2) \le A^2\left(\sqrt{x}\right),$$

что противоречит неравенству (*).

Будем предполагать, что $x \ge 2000$ (при меньших значениях x проверка постулата Бертрана не представляет сложности). Заменив в тождестве Чебышёва x на $x/2$ и проведя несложные преобразования, получим основную формулу:

$$\frac{[x]!}{\left([x/2]!\right)^2} = \frac{A(x)A(x/2)A(x/3)A(x/4)\ldots}{A^2(x)A^2(x/4)A^2(x/6)\ldots} = \frac{A(x)A(x/3)A(x/5)\ldots}{A(x/2)A(x/4)A(x/6)\ldots}.$$

Заметим, что $A(x)$ при увеличении x не убывает, поэтому из основной формулы следуют оценки:

$$\frac{A(x)}{A(x/2)} \le \frac{[x]!}{\left([x/2]!\right)^2} \le \frac{A(x)\cdot A(x/3)}{A(x/2)}.$$

Пусть $[x/2] = m$, т.е. $m \le x/2 < m+1$. Тогда, применяя неравенство $2k+1 \le 3k$, получим

$$\text{i)}\ \frac{A(x)}{A(x/2)} \le \frac{[x]!}{\left([x/2]!\right)^2} \le \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} = 2^m \cdot \frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} \le 2^m\cdot 3^m \le 6^{x/2}.$$

Аналогично, вследствие неравенства $2k+1 \ge 2k$,

$$\text{ii)}\ \frac{A(x)A(x/3)}{A(x/2)} \ge \frac{[x]!}{\left([x/2]!\right)^2} \ge \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{2^m\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)}{(2m+1)\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} \ge \frac{2^{2m}}{2m+1} \ge \frac{2^{x-2}}{x+1}.$$

Применяя неравенство i), находим

$$A(x) = \frac{A(x)}{A(x/2)}\cdot\frac{A(x/2)}{A(x/4)}\cdot\frac{A(x/4)}{A(x/8)}\cdot\ldots \le 6^{\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\ldots} \le 6^x.$$

Отсюда следуют оценки:

$$A^2\left(\sqrt{x}\right) \le 6^{2\sqrt{x}};\ A(x/3) \le \left(\sqrt[3]{6}\right)^x.$$

Теперь, применяя последнюю оценку, из неравенства ii) получаем

$$\frac{A(x)}{A(x/2)} \ge \frac{2^{x-2}}{(x+1)A(x/3)} \ge \left(\frac{2}{\sqrt[3]{6}}\right)^x\cdot\frac{1}{4(x+1)} \ge \frac{1{,}1^x}{4(x+1)}.$$

Таким образом, для доказательства (*), а значит, и постулата Бертрана, нам осталось проверить, что при целых $x \ge 2000$ справедливо неравенство

$$1{,}1^x > 4(x+1)\cdot 6^{2\sqrt{x}}. \qquad (**)$$

При $x = 2000$ это неравенство выполняется, в чем можно убедиться непосредственно вычислением. Заметим, что при увеличении натурального $x \ge 2000$ на единицу левая часть неравенства (**) увеличивается в 1,1 раза, а правая — менее чем в 1,05 раза, так как

$$\frac{x+2}{x+1}\cdot 6^{2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)} < \left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot 6^{1/\sqrt{2000}} < 1{,}05.$$

Следовательно, неравенство (**) останется справедливым при всех целых $x \ge 2000$, что и требовалось доказать.

Итак, постулат Бертрана доказан при всех натуральных $n \ge 1000$. При меньших значениях n постулат Бертрана проверяется непосредственно, например с помощью таблиц простых чисел.[4]

[4] *Другие варианты доказательства постулата Бертрана можно найти в [1, 5, 8, 9].*

Задачи

1. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k-1$. *Указание.* Рассмотрите выражение

$$4\cdot\left(3\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot\ldots(4k-1)\right)^2 - 1.$$

2. Докажите, что не существует многочлена, принимающего только простые значения при всех целых значениях аргумента.

3. Докажите, что если $2^n - 1$ – простое, то n – простое.

4. Докажите, что если $2^n + 1$ – простое, то $n = 2^m$.

5. Докажите, что между n и $2n$ найдется не менее 10 простых чисел, если $n > 100$. *Указание.* Докажите, что

$$A(x)/A(x/2) > x^{10}\cdot A^2\left(\sqrt{x}\right) \text{ при } x > 4000.$$

6. Обозначим через $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Докажите, что справедливы неравенства

$$x^{\frac{1}{2}\pi(x)} \le A(x) \le x^{\pi(x)};$$

$$\frac{x}{2\log_2 x} \le \pi(x) \le \frac{6x}{\log_2 x},\ x \ge 2.$$

7. Пусть $B(x) = x\cdot A(x)$. Докажите, что тогда

$$C(x) = B(x)\cdot B(x/2)\cdot\ldots\cdot B(x/[x]) = x^{[x]}.$$

8. Рассмотрев выражение

$$\frac{C(x)\cdot C(x/30)}{C(x/2)\cdot C(x/3)\cdot C(x/5)},$$

докажите, что при достаточно больших x $B(x) > 2{,}5^x$; $B(x)/B(x/6) < 2{,}6^x$; $B(x) < 3{,}1^x$.

9. Докажите, что при целых $n \ge 2$ между n и $1{,}5n$ найдется простое число.

10. Докажите, что при любом положительном ε найдется бесконечно много пар последовательных простых чисел, для которых $p_{n+1} < (1+\varepsilon)p_n$.

Указание. Обобщите утверждение задачи 5.

Литература

1. *М.И.Башмаков*. О постулате Бертрана. («Квант» №5 за 1971 г.)
2. *В.Боро, Д.Цагир, Ю.Рольфс, Х.Крафт, Е.Янцен*. Живые числа.
3. *И.М.Виноградов*. Основы теории чисел.
4. *А.И.Галочкин, Ю.В.Нестеренко, А.Б.Шидловский*. Введение в теорию чисел.
5. *Л.Г.Лиманов*. О числе *e* и *n*!. («Квант» №5 за 1972 г.)
6. *Д.Пойа*. Математика и правдоподобные рассуждения.
7. *Э.Трост*. Простые числа.
8. *К.Чандрасекхаран*. Введение в аналитическую теорию чисел.
9. *П.Л.Чебышёв*. Избранные труды.
10. *А.М.Яглом, И.М.Яглом*. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.