иметь разложение на простые сомножители и, значит, должно делиться на некоторое простое число. Мы приходим к противоречию с предположением о конечности множества простых чисел, что и требовалось доказать.

С простыми числами связано много задач, формулировка которых очень проста, но решение до сих пор не найдено. Например, неизвестно, конечно или бесконечно число простых чисел вида $2^n - 1$ или вида $n^2 + 1$. Также до сих пор не доказано и не опровергнуто предположение Эйлера о том, что любое четное число, больше двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

В последовательности натуральных чисел встречаются пары простых, отличающиеся на двойку, например 3 и 5; 17 и 19; 59 и 61 и т.д.

Предполагают, что таких пар «простых близнецов» бесконечно много, однако до настоящего времени доказать это не удалось, несмотря на усилия многих очень сильных математиков. Вместе с тем, легко построить примеры сколь угодно длинных промежутков из последовательных натуральных чисел, не содержащих простых чисел; например, очевидно, все числа $N + 2$, $N + 3$, …, $N + 1000$, где $N = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000$ – составные (так как они делятся соответственно на 2, 3, …, 1000).

Французскому математику Жозефу Луи Франсуа Бертрану при исследовании некоторых вопросов из высшей алгебры пришлось воспользоваться одним интересным свойством простых чисел. Бертран не смог доказать это утверждение и принял его в качестве постулата.

Постулат Бертрана. *Между n и 2n обязательно найдется простое число p, каково бы ни было натуральное n.*

Доказать постулат Бертрана удалось выдающемуся русскому математику Пафнутию Львовичу Чебышёву. Мы приведем упрощенный вариант доказательства Чебышёва, в котором применяется его замечательное тождество о связи между произведением наименьших общих кратных и факториалом числа.

Для понимания доказательства постулата Бертрана требуется лишь умение проводить несложные преобразования с алгебраическими выражениями и неравенствами. Задачи, приведенные в конце статьи, помогут получить более полное представление о методе Чебышёва. Список литературы адресован тем, кто захочет более глубоко изучить методы элементарной теории простых чисел.

Начнем с определения двух важных понятий арифметики – канонического разложения натурального числа и показателя простого числа в каноническом разложении.

Если в разложении натурального числа n на простые сомножители записать произведение одинаковых простых сомножителей p в виде p^α, то получится *каноническое разложение* числа n:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s},$$

где все простые $p_1, \ldots, p_s$ различны (например, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$).

Будем говорить, что простое число p входит в разложение n с *показателем* α_k, если $p = p_k$. Если же n не делится на простое число p, то будем считать, что показатель равен нулю.

Прежде чем доказывать постулат Бертрана, решим следующую задачу:

Найти показатель $\nu_p(x)$, с которым простое p входит в разложение на простые сомножители произведения всех натуральных чисел, не превосходящих некоторого числа $x \ge 1$.

Наибольшее целое число, не превосходящее x, принято записывать в виде $[x]$ (читается: «*целая часть x*»). Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначают символом $n!$ (читается: «*n факториал*»).

Заметим, что показатель простого числа p в произведении

$$[x]! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot [x]$$

зависит только от тех сомножителей, которые делятся на p, т.е. равен показателю p в произведении

$$p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot (x/p)p = p^{[x/p]} \cdot [x/p]!$$

Следовательно,

$$\nu_p(x) = [x/p] + \nu_p(x/p) =$$

$$= [x/p] + [x/p^2] + \nu_p(x/p^2) =$$

$$= [x/p] + [x/p^2] + [x/p^3] + \ldots,$$

где слагаемые вида $[x/p^k]$ добавляются, пока $x \ge p^k$.

Например, число 5 входит в разложение 1000! в степени

$$[1000/5] + [1000/25] + $$
$$+ [1000/125] + [1000/625] = 249,$$

т.е. 1000! в десятичной записи оканчивается 249 нулями.

Перейдем к доказательству постулата Бертрана.

Обозначим через $A(x)$ наименьшее общее кратное всех натуральных чисел, не превосходящих x:

$$A(x) = \text{НОК}(1, 2, 3, \ldots, [x]).$$

Легко понять, что каждое простое p входит в разложение $A(x)$ на простые сомножители в степени k_p, где k_p – максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $p^{k_p} \le x$, т.е. k_p равно числу решений неравенства $p^k \le x$ в натуральных k.

Найдем теперь показатель $a_p(x)$, с которым простое p входит в произведение

$$A(x) \cdot A(x/2) \cdot A(x/3) \cdot \ldots \cdot A(x/[x]).$$

Очевидно, $a_p(x)$ равно числу решений неравенства $p^k \le x/n$ в натуральных n и k. При каждом фиксированном k имеется $[x/p^k]$ решений этого неравенства, следовательно,

$$a_p(x) = [x/p] + [x/p^2] +$$
$$+ [x/p^3] + \ldots = \nu_p(x),$$

т.е. разложение на простые сомножители произведения

$$A(x) \cdot A(x/2) \cdot A(x/3) \cdot \ldots \cdot A(x/[x])$$

совпадает с разложением на простые сомножители $[x]!$. Тем самым доказано

Тождество Чебышёва.[3] *При любом $x \ge 1$*

$$A(x) \cdot A(x/2) \cdot A(x/3) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot A(x/[x]) = [x]!.$$

Основная идея доказательства постулата Бертрана состоит в том, что достаточно проверить справедливость неравенства

$$A(x)/A(x/2) > A^2(\sqrt{x}). \quad (*)$$

[3] *Чебышёв применял это тождество в равносильной форме, получающейся логарифмированием приведенного выражения.*