Павел Самуилович Урысон

В.ТИХОМИРОВ, В.УСПЕНСКИЙ

В ЭТОМ ГОДУ исполнилось сто лет со дня рождения Павла Самуиловича Урысона. Его жизнь трагически оборвалась, когда ему было всего двадцать шесть лет, но имя его известно каждому математику — столь фундаментальным явился его вклад в нашу науку.

П.С.Урысон родился 3 февраля 1898 года в Одессе. Он рано лишился матери. Заботу о мальчике, наряду с отцом, взяла на себя его сестра — Лина Самойловна Нейман, в будущем — известная детская писательница. В 1912 году мальчик вместе с отцом и сестрой переезжает в Москву.

В Москве юноша поступает в гимназию и блестяще заканчивает ее. Еще будучи школьником, он начинает работать в университете Шанявского под руководством выдающегося русского физики П.П.Лазарева. Павел выполняет экспериментальное исследование о радиации рентгеновских лучей — он мечтает стать физиком. Но затем интерес к математике перевешивает. В 1915 году Павел становится студентом физико-математического факультета Московского университета и вскоре примыкает к школе Николая Николаевича Лузина. (В эти годы учениками Лузина были П.С.Александров, Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин и А.Я.Хинчин, ставшие впоследствии знаменитыми математиками.)

Окончив университет, Урысон поступает в аспирантуру к Лузину, которую заканчивает в 1921 году. Тогда же начинается его сотрудничество с П.С.Александровым. (С 30 марта 1921 года ПСы — как называли Павла Самуиловича Урысона и Павла Сергеевича Александрова в университете — исчисляли начало своей дружбы.)

К моменту окончания аспирантуры Урысон выполнил несколько ярких работ.

Одна из них была посвящена теории дифференциальных уравнений, и основное построение основывалось на физической интуиции. (Впоследствии стало известно, что чуть раньше сходный результат получил А.Лебег, один из крупнейших математиков Франции, но его работа была недоступна в Москве.) Урысон написал первую в России работу по теории нелинейных уравнений в бесконечномерном пространстве (за одним важным классом нелинейных уравнений закрепилось имя Урысона). Эта работа относится по сути дела к еще не родившемуся тогда функциональному анализу: она была «востребована» лишь через тридцать лет.

П.С.Урысон (1898 — 1924)

Павлу Самуиловичу принадлежит замечательная теорема выпуклой геометрии: он доказал, что шар является телом максимального объема при фиксированной средней ширине.

Но главным делом жизни П.С.Урысона стало создание (совместно с П.С.Александровым) топологической школы в нашей стране. (С необычайной щедростью к своему другу, отодвинув себя в тень, Павел Сергеевич написал: «Основное место П.С.Урысона в истории советской математики тем и определяется, что именно он является создателем советской топологии».)

Именно в топологии Урысон получил наиболее выдающиеся результаты, результаты на все времена. Он первым доказал теоремы метризации и построил универсальное метрическое пространство.

Но важнейшим вкладом Урысона в топологию явилось создание *теории размерности*, решение проблемы, поставленной А.Пуанкаре[1]. О некоторых достижениях Урысона в топологии мы расскажем в этой статье.

«Топология (Analysis Situs) есть определенный раздел геометрии, который изучает свойства множеств, инвариантные относительно всякого гомеоморфного, т.е. взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения», — с этих слов начинается один из знаменитых мемуаров Урысона. В топологии есть несколько разделов. Один из них примыкает к геометрии (*комбинаторная топология*), старинное название его – Analysis Situs – «анализ положения»; другой – к теории множеств (*общая топология*). Для общей топологии ключевыми являются слова «предел», «непрерывность», «открытое» и «замкнутое» множества.

Родоначальником общей топологии считается Георг Кантор (о Канторе см. «Квант» №5 за 1995 г.). Кантор ввел основные топологические понятия, перечисленные нами, на прямой и в пространствах большего числа измерений.

Дадим современное аксиоматическое определение топологического пространства.

Пусть X — некоторое множество, τ — система его подмножеств. Пара (X, τ) называется *топологическим*

---

[1] *О том, что такое размерность, можно прочитать в «Кванте» №6 за 1991 год.*

пространством, если пересечение конечного числа и объединение любого числа множеств из τ принадлежит системе τ, все множество X и пустое множество также принадлежат τ. Множества из τ называют *открытыми*; множества из τ, содержащие некоторую точку, называются *окрестностями* этой точки. Далее всегда топологическое пространство будем предполагать *хаусдорфовым*, когда любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Множество, являющееся дополнением к открытому множеству, называется *замкнутым.* Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество A, называется *замыканием* A и обозначается $\overline{A}$. (Первая аксиоматика топологического пространства, данная Куратовским в 1922 году, исходила именно из понятия замыкания.)

Внутренность множества A – это наибольшее открытое множество, содержащееся в A, *граница* множества – это разность между замыканием и внутренностью. Отображение $f\colon X \to Y$ одного топологического пространства в другое *непрерывно*, если прообраз любого открытого в Y множества открыт в X. Всякое подмножество A топологического пространства X может рассматриваться как топологическое пространство, в котором открытые множества – это пересечения открытых в X множеств с A.

Понятие топологического пространства выкристаллизовалось не сразу, на это ушли многие десятилетия. В его окончательном формировании приняли участие (среди многих других) немецкий математик Ф.Хаусдорф, французский математик М.Фреше и польский математик К.Куратовский. А именно в той форме, которая была приведена нами, понятие топологического пространства было сформулировано другом Павла Самуиловича Урысона П.С.Александровым в 1925 году.

Во времена, предшествовавшие рождению топологии, основным объектом, в котором изучали свойства непрерывности, были *метрические пространства*. Что это такое? Пусть снова X — некоторое множество, и имеется определенная на нем *функция расстояния*, которая каждой паре (x, y) точек из X ставит в соответствие число $d(x, y)$ (расстояние между x и y), удовлетворяющее трем свойствам: a) $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) > 0$, если $x \neq y$; b) $d(x, y) = d(y, x)$ и, наконец, c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Последнюю аксиому называют *аксиомой треугольника.*) Пару (X, d) с описанными свойствами и называют *метрическим пространством.*

Каждое метрическое пространство является топологическим пространством. Открытые множества в метрическом пространстве X определяются как объединения *открытых шаров* вида $B(x, r) = \{y \in Y | d(x, y) < r\}$. Например, на числовой прямой $\boldsymbol{R}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$ открытые множества – это объединения открытых интервалов.

И сразу же возник один из центральных вопросов общей топологии: *когда топологическое пространство можно метризовать*, т.е. ввести на нем метрику, задающую ту же топологию, что изначальная?

Урысону принадлежит основополагающий результат в этой области, получивший название теоремы метризации Урысона. Для его формулировки надо дать два определения.

Топологическое пространство называется *нормальным*, если для любой пары замкнутых непересекающихся множеств существуют два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит первое замкнутое множество, а другое — второе.

Говорят, что топологическое пространство *имеет счетную базу*, если имеется счетное семейство открытых множеств, объединяя которые можно получить любое открытое множество. Для метрического пространства наличие счетной базы равносильно *сепарабельности*, т.е. наличию в нем счетного множества, замыкание которого совпадает со всем пространством.

Имеет место

Метризационная теорема Урысона. *Нормальное топологическое пространство со счетной базой метризуемо.*

Центральным местом в доказательстве этого результата является следующее утверждение, известное как *лемма Урысона*, авторское доказательство которой производит большое эстетическое впечатление, а заложенный в него прием построения бесчисленное число раз в различных формах использовался в математических исследованиях.

Лемма Урысона. *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся подмножества нормального пространства X. Тогда существует непрерывная функция f, определенная на всем X, принимающая значение нуль на A, единица на B и удовлетворяющая неравенству $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого x.*

Наметим доказательство этой леммы. Пусть U_1 — дополнительное к B множество. Оно открыто и содержит A. Из определения нормальности вытекает, что для всякой пары (F, G), где F – замкнутое множество в X, а G – содержащее F открытое множество, существует открытое множество V, содержащее F и содержащееся в G вместе со своим замыканием. Применяя это рассуждение к паре (A, U_1), найдем открытое множество U_0, для которого $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

Далее находим открытое множество $U_{1/2}$, которое содержит $\overline{U_0}$ и с замыканием содержится в U_1. Затем построим два открытых множества $U_{1/4}$ и $U_{3/4}$ относительно пар $\left(\overline{U_0}, U_{1/2}\right)$ и $\left(\overline{U_{1/2}}, U_1\right)$. Продолжая далее этот процесс, построим семейство $\{U_r\}$, где r пробегает совокупность всех двоично-рациональных чисел (т.е. рациональных чисел, знаменатель которых – степень двойки), расположенных между нулем и единицей. Остается положить $f(x)$ равным нижней грани тех (двоично-рациональных) чисел r, при которых $x \in U_r$. Без труда доказывается, что построенная функция непрерывна и обладает всеми перечисленными свойствами.

Но основным вкладом Урысона в математику явилось построение им теории размерности. В создании теории размерности основополагающую роль сыграли пять математиков. Это А.Пуанкаре, один из величайших ученых всех времен, голландский математик Л.Брауэр, упомянутый нами французский математик А.Лебег, австрийский математик К.Менгер и П.С.Урысон.

Как придать точный смысл утверждению, что плоскость двумерна, а пространство трехмерно? У Пуанкаре есть цикл статей, написанных незадолго до его смерти. Одна из них называется «Почему пространство имеет три измерения». Пуанкаре писал там: «Я попытаюсь обосновать определение числа измерений на понятии сечения. Представим себе замкнутую кривую, т.е. непрерывность одного измерения. Если мы отметим на этой кривой две какие-нибудь точки, через которые мы запретим себе переступать, то кривая окажется разделенной на две части, и невозможно будет перейти из одной части в другую, оставаясь на кривой. Возьмем, наоборот, замкнутую поверхность, образующую непрерывность двух измерений. Мы можем отметить на этой поверхности одну, две, любое число запретных точек, поверхность от этого не окажется разбитой на две части. Можно будет перейти от одной ее точки к другой, не встречая препятствий, так как всегда можно будет обойти запретные точки.

Но если мы проведем на нашей поверхности одну или несколько замкнутых кривых и если мы будем рассматривать их как сечения, которые нельзя переступать, то поверхность может быть рассечена на несколько частей». И далее Пуанкаре аналогично объясняет, что пространство имеет три измерения.

Эти высказывания выражают суть дела, но не могут, разумеется, служить точным определением размерности. Первым, кто дал строгое определение, был Л.Брауэр. Его подход основан на понятии перегородки. Пусть X – топологическое пространство, A и B – непересекающиеся множества в X. Замкнутое множество C называют *перегородкой* между A и B, если дополнение к C в X можно представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств U и V, из которых первое содержит A, а второе – B. Теперь индукцией по n определим, что значит выражение «пространство имеет размерность $\le n$» (обозначается $\mathrm{Ind}X \le n$). Пустое множество (и только оно) имеет размерность -1. Пространство X имеет размерность $\le n$, если между любыми двумя замкнутыми непересекающимися множествами в X существует перегородка размерности $\le n-1$. Положим $\mathrm{Ind}X = n$, если неравенство $\mathrm{Ind}X \le n$ имеет место, а неравенство $\mathrm{Ind}X \le n-1$ – нет.

Нетрудно показать, что для евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ выполняется неравенство $\mathrm{Ind}\boldsymbol{R}^n \le n$. Значительно сложнее установить, что на самом деле имеет место равенство $\mathrm{Ind}\boldsymbol{R}^n = n$. Это равенство связано с *теоремой Брауэра о неподвижной точке*: если B – замкнутый шар в $\boldsymbol{R}^n$ и $f\colon B \to B$ — непрерывное отображение, то найдется точка $x \in B$, для которой $f(x) = x$.

Урысон исходил из несколько иного определения размерности: он рассматривал перегородки не между произвольными замкнутыми множествами, а между точками и замкнутыми множествами. Определим *малую индуктивную размерность* $\mathrm{ind}X$ аналогично тому, как мы определили $\mathrm{Ind}X$. Полагаем $\mathrm{ind}X \le n$, если для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего точки x, существует перегородка C между x и F размерности $\le n-1$. Эквивалентно: $\mathrm{ind}X \le n$ тогда и только тогда, когда у каждой точки $x \in X$ есть сколь угодно малая окрестность, граница которой имеет размерность $\le n-1$. Равенство $\mathrm{ind}X = 0$ означает, что у каждой точки $x \in X$ есть сколь угодно малая окрестность с пустой границей, т.е. окрестность, являющаяся одновременно открытым и замкнутым множеством. Например, непустое подмножество прямой нульмерно тогда и только тогда, когда оно не содержит никакого интервала. Для сепарабельных метрических пространств большая индуктивная размерность совпадает с малой.

Существует еще один подход к размерности, восходящий к Лебегу и основанный на понятии кратности покрытия. Один из наиболее значительных результатов Урысона заключается в том, что размерность, определенная с помощью кратности покрытий, совпадает с индуктивной размерностью.

Пусть S – система подмножеств X. Скажем, что S имеет *кратность* $\le n$, если любая точка из X принадлежит не более чем n множествам из S. Лебег доказал, что всякое покрытие плоскости замкнутыми ограниченными множествами имеет кратность ≥ 3 (покрытия кратности 3, очевидно, существуют – достаточно замостить плоскость шестиугольниками). Это вытекает из такого утверждения: если треугольник со сторонами a_1, a_2, a_3 покрыт тремя замкнутыми множествами F_1, F_2, F_3, причем F_i не пересекается с a_i (i = 1, 2, 3), то множества F_1, F_2, F_3, имеют общую точку. Аналогичное утверждение справедливо для $\boldsymbol{R}^n$ при любом n. Например, всякое покрытие пространства $\boldsymbol{R}^n$ замкнутыми ограниченными множествами имеет кратность $\ge n+1$.

Пусть X – замкнутое ограниченное множество в некотором евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^k$. Скажем, что размерность dim (*размерность, определенная с помощью кратности покрытий*) метрического пространства X не превосходит n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие S пространства X конечным числом замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$, такое, что кратность S не превосходит $n+1$. Как и в случае индуктивной размерности, равенство $\dim X = n$ означает, что неравенство $\dim X \le n$ имеет место, а неравенство $\dim X \le n-1$ нарушается.

Урысон доказал, что $\dim X = \mathrm{ind}X$. Таким образом, два совершенно разных подхода к определению размерности — через понятие перегородки и через кратность покрытий – приводят к одному и тому же числу. Размерность dim можно определить для произвольных метрических пространств, при этом для сепарабельных метрических пространств X все три размерности совпадают: $\dim X = \mathrm{ind}X = \mathrm{Ind}X$. Для несепарабельных метрических пространств равенство $\dim X = \mathrm{Ind}X$ по-прежнему выполняется, но при этом малая индуктивная размерность может оказаться строго меньше большой.

Таким образом, каждому подмножеству X евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ можно сопоставить целое число ≥ -1 — размерность $\dim X$. При этом $\dim X = n$ тогда и только тогда, когда X имеет внутренние точки (т.е. содержит некоторый шар), в противном случае $\dim X < n$ (Урысон).

Приведем замечательный пример одномерного замкнутого множества в $\boldsymbol{R}^3$. Возьмем единичный куб F_0 в $\boldsymbol{R}^3$. Разделим его естественным образом на 27 равных кубиков со стороной 1/3. Пусть F_1 — объединение тех 20 из них, которые имеют общие точки с ребрами куба F_0 (остальные 7 – это центральный кубик и еще шесть, примыкающих к нему по граням). С каждым из 20 кубиков, из которых слагается F_1, проделаем аналогичную операцию. Получим 400 кубиков с ребром 1/9. Пусть F_2 — их объединение. Продолжая эту конструкцию, получаем убывающую последовательность множеств $F_0 \supset F_1 \supset \ldots F_n \ldots$ Пересечение M всех множеств F_n называется *кривой Менгера*. Можно показать, что кривая Менгера одномерна. Кроме того, M является универсальной кривой в следующем смысле: всякое одномерное сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно подпространству в M.

Существует аналог кривой Менгера на плоскости — так называемый *ковер Серпинского.* Пусть K_0 — единичный квадрат на плоскости. Разделим его на 9 равных квадратиков со стороной $1/3$. Пусть K_1 — объединение восьми квадратиков, кроме центрального. Далее аналогично получаем K_2, K_3, ... Ковер Серпинского – это пересечение всех множеств K_n. Ковер Серпинского K одномерен и является универсальной плоской кривой: всякое одномерное подмножество плоскости гомеоморфно подмножеству в K.

Опишем, наконец, *универсальное n-мерное пространство Небелинга*. Пусть дано целое $n \geq 0$. Рассмотрим множество N_n всех тех точек $\{x_1, \ldots, x_{2n+1}\} \in \boldsymbol{R}^{2n+1}$, для которых среди чисел $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ не более чем n рациональных. Оказывается, что $\dim N_n = n$, и всякое сепарабельное метрическое пространство размерности $\leq n$ гомеоморфно подпространству в N_n. Отсюда получается такой результат Урысона: $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда X можно представить в виде объединения $n+1$ нульмерных подпространств. Для пространства N_n такое представление получается, если рассматривать точки $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ с фиксированным числом k рациональных координат, $0 \leq k \leq n$.

Творчество Урысона представлено в двух томах собрания его трудов (Труды по топологии и другим областям математики, т.1,2. М.-Л., (1951), там же имеются подробные комментарии); оно многократно было с блеском освещено П.С.Александровым. (Необходимо сказать, что сам Павел Самуилович написал лишь малую часть того, что вошло в собрание его сочинений. Большую часть оформил Павел Сергеевич — по оставшимся письменным наброскам Урысона и по воспоминаниям об их математических беседах. Поразительный пример благородства!)

Лина Самойловна Нейман посвятила своему любимому брату книгу «Радость открытия» (М., «Детская литература», 1972). Помимо ее воспоминаний и выдержек из дневников Урысона, в книге содержатся воспоминания и обзоры творчества Урысона, написанные П.С.Александровым, А.Н.Колмогоровым, Л.А.Люстерником, В.А.Ефремовичем и М.А.Красносельским. Читатель получит большое удовольствие, прочитав эту книжку. Отрывки из дневников Урысона, приводимые в ней, помимо того что дают впечатление о его личности, являются выразительным историческим документом той эпохи.

Павел Самуилович был человеком редкой душевной красоты. Об этом много рассказывали те, кому выпало счастье быть знакомым с П.С.Урысоном: Павел Сергеевич Александров, Андрей Николаевич Колмогоров и другие.

Среди многих привлекательных черт, помимо доброты, отзывчивости, душевной щедрости, все отмечали исключительную разносторонность его интересов и поразительную целеустремленность. Андрей Николаевич Колмогоров подчеркивал еще одну очень импонировавшую ему черту характера Павла Самуиловича — жизнерадостность, неуемную жажду жизни.

Счастливой уверенности, что в жизни все кончается хорошо, Андрей Николаевич приписывал причину трагической гибели Урысона. Павел Самуилович, считая, что знает тайну купания в штормовую погоду, бесстрашно бросился в беспокойное море. И погиб.

Павел Сергеевич Александров так писал о своем друге: «В лице П.С.Урысона математическая наука потеряла ученого самого большого масштаба, с универсальной одаренностью, с интересами, охватывающими всю математику, с любознательностью, распространяющейся на самые разнообразные области знания человеческого. Общая одаренность его личности проявлялась [...] в его сильных и глубоких реакциях на все значительное, что происходило вокруг него в жизни человеческого общества, в его умении и любви работать, в той остроте, с которой он воспринимал природу и искусство. Все это делало образ Павла Самуиловича Урысона не только живым, но и незабываемым [...] для всех людей, которым довелось с ним встретиться на жизненном пути».