Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Маятник с несколькими грузиками» предназначена девятиклассникам, заметка «Еще один вечный двигатель?» — десятиклассникам, «Закон электромагнитной индукции или «правило потока»?» – одиннадцатиклассникам.

Маятник с несколькими грузиками

П.ХАДЖИ, А.МИХАЙЛЕНКО

Логическим и простейшим обобщением традиционного математического маятника является маятник с двумя или более грузиками. Такой маятник можно назвать частным случаем физического маятника.

Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть к жесткому невесомому стержню прикреплены два точечных тела с массами m_1 и m_2 на расстояниях l_1 и l_2 соответственно от точки подвеса (рис.1,*а*). Найдем частоту колебаний такого маятника.

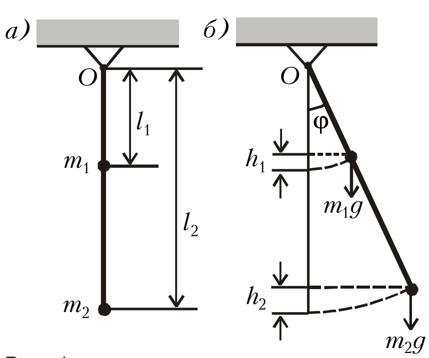

Рис. 1

В положении равновесия стержень маятника располагается вертикально. Выведем маятник из положения равновесия, отклонив стержень с грузами на небольшой угол φ (рис.1,*б*). Каждый из грузов при этом поднимется на определенную высоту относительно своего положения равновесия. Первый поднимется на высоту $h_1 = l_1(1-\cos\varphi)$, а второй – на $h_2 = l_2(1-\cos\varphi)$. Запасенная системой грузов потенциальная энергия относительно положения равновесия будет равна

$$\Delta E_p = m_1gh_1 + m_2gh_2 = (m_1l_1 + m_2l_2)g(1-\cos\varphi).$$

Предоставим теперь маятник самому себе. Благодаря касательным составляющим сил тяжести грузов (которые играют роль «возвращающих» сил), маятник начнет двигаться к положению равновесия. Линейные скорости грузов по мере приближения к положению равновесия будут возрастать. В положении равновесия полная кинетическая энергия грузов станет равной

$$E_k = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — линейные скорости движения грузов. Выражая v_1 и v_2 через угловую скорость вращения стержня Ω и длины l_1 и l_2:

$$v_1 = \Omega l_1,\ v_2 = \Omega l_2,$$

кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$E_k = \frac{1}{2}\Omega^2\left(m_1l_1^2 + m_2l_2^2\right).$$

Предполагая, что в системе отсутствуют потери энергии из-за трения в оси и сопротивления воздуха, и используя закон сохранения энергии, можно приравнять потенциальную энергию кинетической. В результате для угловой скорости вращения стержня получаем выражение

$$\Omega^2 = 2g\frac{m_1l_1 + m_2l_2}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}(1-\cos\varphi).$$

Сравним наш маятник с некоторым математическим маятником, имеющим такую длину L, что при одном и том же начальном отклонении φ от положения равновесия угловые скорости Ω и периоды колебаний T обоих маятников оказываются одинаковыми. Для математического маятника можно записать

$$\Delta E_p = mgL(1-\cos\varphi),$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v = \Omega L\cdot$$

Используя закон сохранения энергии, для угловой скорости Ω получаем выражение

$$\Omega^2 = 2\frac{g}{L}(1-\cos\varphi).$$

Так как при одном и том же угловом отклонении φ угловые скорости Ω обоих маятников равны, приравнивая правые части соответствующих равенств, находим длину L математического маятника, эквивалентного исходному маятнику с двумя грузами:

$$L = \frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{m_1l_1 + m_2l_2},$$

а значит, и частоту колебаний нашего физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{g\frac{m_1l_1 + m_2l_2}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}},$$

и его период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{m_1l_1 + m_2l_2}}.$$

Если m_1 либо m_2 равны нулю (т.е. один из грузов отсутствует), то из последнего выражения получаем формулу для периода колебаний математического маятника. Если же, например, $m_1 = m_2$ (т.е. массы обоих грузов одинаковы), то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 + l_2}}.$$

Таким образом, частота и период колебаний нашего маятника определяются как массами грузов, так и их расстояниями от оси вращения.

Сравним полученное выражение для частоты колебаний исследуемого маятника ω с частотами колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей l_1 и l_2 соответственно, которые выражаются формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$

Если положить $l_1 > l_2$, то получаем неравенство

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 .$$

Таким образом, частота колебаний маятника с двумя грузами, расположенными на расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения, меньше большей и больше меньшей из собственных частот колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей l_1 и l_2 соответственно.

Исследуем теперь более детально выражение для ω. Предположим, что один из грузов, например груз с массой m_1, расположен на фиксированном расстоянии l_1 от оси вращения маятника, а расстояние l_2 второго груза с массой m_2 меняется. Найдем отношение частоты колебаний нашего маятника к частоте колебаний математического маятника с длиной нити l_1:

$$y = \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} .$$

Введем безразмерные переменные $x = l_2/l_1$ и $a = m_2/m_1$. Тогда

$$y = \sqrt{\frac{1 + ax}{1 + ax^2}} .$$

Исследуем зависимость y от x, т.е. зависимость отношения частот ω/ω_1 от отношения длин l_2/l_1. Поступим следующим образом. Обозначим $z = 1 + ax$ и запишем

$$y = \sqrt{\frac{az}{z^2 - 2z + a + 1}} = \sqrt{\frac{a}{z + \frac{a+1}{z} - 2}} = \sqrt{\frac{a}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{\frac{a+1}{z}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{a+1} - 1\right)}} .$$

Отсюда видно, что функция $y(z)$ изменяется немонотонно: с ростом z (начиная с $z = 1$) функция сначала растет, достигает максимума при $z = \sqrt{a+1}$ (это следует из условия обращения в ноль первого слагаемого в знаменателе), после чего монотонно убывает. Максимальное значение при этом равно

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{a}{2\left(\sqrt{a+1} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+1} + 1\right)} .$$

Возвращаясь снова к переменной x, находим значение $x = x_0$, при котором функция $y(x)$ достигает максимума:

$$x = x_0 = \frac{\sqrt{a+1} - 1}{a} = \frac{\sqrt{m_1\left(m_1 + m_2\right)} - m_1}{m_2} .$$

На рисунке 2 представлен график зависимости функции $y = y(x)$. Видно, что $y > 1$ в области $0 < x < 1$, т.е. при $l_1 > l_2$ получаем $\omega > \omega_1$. Наоборот, $y < 1$ в области $x > 1$, т.е. при $l_1 < l_2$ получаем $\omega < \omega_1$. Отметим, что чем больше параметр a, тем выше максимум.

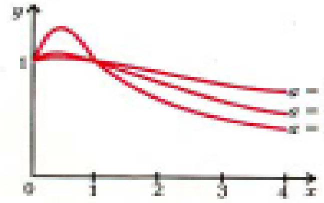

Рис. 2

Нетрудно обобщить полученные результаты на случай n тел с массами m_1, m_2, …, m_n, закрепленных на невесомом стержне на расстояниях l_1, l_2, … …, l_n соответственно от точки подвеса:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\,\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \ldots + m_n l_n^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2 + \ldots + m_n l_n}} .$$

Если массы всех грузов одинаковы, то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\,\frac{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}} ,$$

т.е. период колебаний определяется только расстояниями, на которых располагаются грузики.