(k – натуральное число) к тождеству

$$m^{k_1}+m^{k_2}+\ldots+m^{k_n}=n+\left(m^{k_1}-1\right)+\left(m^{k_2}-1\right)+\ldots+\left(m^{k_n}-1\right)$$

(здесь k_1, k_2, …, k_n — натуральные числа). Поскольку в последнем тождестве в скобках стоят числа, кратные $m-1$, то и вся сумма будет кратной $m-1$, если n кратно $m-1$.

Рассмотрим теперь сумму $s=\sum\limits_{i=0}^{k(m-1)-1} m^{in}$, где k, n – натуральные числа. Поскольку эта сумма объединяет $k(m-1)$ слагаемых натуральных степеней числа m, то она кратна числу $m-1$: $s=N\cdot(m-1)$ (N — натуральное число). С другой стороны, как сумма геометрической прогрессии она равна $s=\dfrac{m^{nk(m-1)}-1}{m^n-1}$, поэтому $m^{nk(m-1)}-1=N(m-1)\left(m^n-1\right)$, т.е. число $m^{nk(m-1)}-1$ кратно числу $(m-1)\left(m^n-1\right)$. Утверждение задачи получается отсюда при $m=1997$, $n=2000$, $k=5$.

3. Номер пункта a_i после i-го прыжка ($i=1, 2, \ldots$) кузнечика определяется по следующей формуле:

$$\begin{cases} a_i=a_0+i\Delta-Nk, \text{ если } k \text{ – четное;} \\ a_i=(k+1)N-a_0-i\Delta, \text{ если } k \text{ – нечетное,} \end{cases} \qquad (*)$$

где a_i — номер пункта старта кузнечика ($a_0=1$); N – максимальный номер пункта на ленте Мебиуса ($N=1997$); Δ — длина прыжка кузнечика (для кузнечика Пети $\Delta=100$, для кузнечика Васи $\Delta=150$); $k=\left[\dfrac{1+i\Delta}{N}\right]$ — индикатор возрастания или убывания нумерации пунктов при выполнении i-го прыжка (квадратные скобки здесь обозначают функцию «целая часть»: $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x).

Решая совокупность ($*$) неопределенных уравнений в целых числах относительно целых неизвестных i, k при $a_i=1$, находим для кузнечика Пети наименьшее натуральное значение $i=1318$ (при этом $k=15$). Следовательно, кузнечик Вася первым окажется в пункте с номером 1.

4. Одно из возможных решений задачи показано на рисунке 20.

5. Предварительно отметим, что в любой треугольник, вершины которого совпадают с центрами трех кругов радиуса 1, можно поместить равносторонний треугольник с длиной стороны 2.

Построим внутри равностороннего треугольника ABC равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы его стороны были

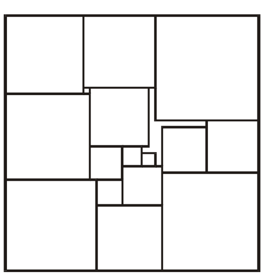

Рис. 20

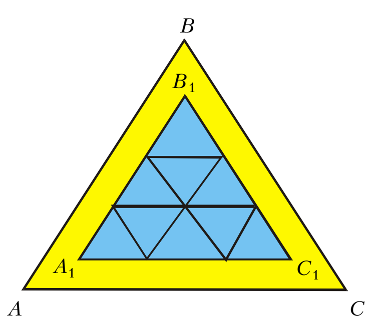

Рис. 21

на 1 удалены от сторон треугольника ABC, и, проведя параллельные линии, разделим треугольник $A_1B_1C_1$ на 9 одинаковых треугольных ячеек (рис.21). Предположим, длина стороны треугольной ячейки меньше 2. Покажем, что в этом случае в три соседние ячейки, образующие трапецию, нельзя поместить равносторонний треугольник с длиной стороны 2. Если бы это удалось сделать, то среди сторон такого треугольника не нашлось бы сторон, параллельных сторонам трапеции (рис.22), причем одна из сторон треугольника должна была бы образовать с основанием трапеции угол, больший 60°. Но в этом случае она была бы меньше боковой стороны трапеции. Противоречие.

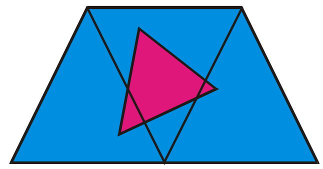

Рис. 22

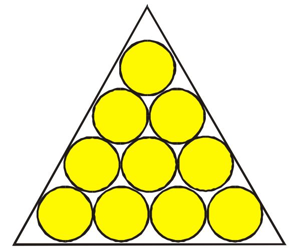

Рис. 23

Итак, поскольку $\Delta A_1B_1C_1$ содержит не менее 9 центров кругов радиуса 1, то либо каждая из ячеек содержит какой-нибудь центр круга, либо в одной из ячеек содержится два центра. И в том, и в другом случае сторона ячейки не может быть меньше 2. На рисунке 23 показано расположение 10 кругов, когда стороны ячеек имеют длину 2.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №