подставив в исходную систему, найти x.

Ответ: (2; –1; 2), (4; –3; 0).

В следующей задаче необходимо, во-первых, увидеть, какую именно функцию следует ввести в рассмотрение, и, во-вторых, обнаружить такие ее свойства, как *нечетность* и *монотонность.*

Пример 5 (МГУ, химфак, 89). *Решите уравнение*

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+$$
$$+\ 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0\ .$$

Решение. Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=x\left(2+\sqrt{x^2+3}\right).$$

При таком выборе $f(x)$ исходному уравнению можно придать вид

$$f(2x+1)+f(3x)=0\ .$$

Заметим, что $f(x)$ — нечетная функция:

$$f(-x)=(-x)\left(2+\sqrt{(-x)^2+3}\right)=-f(x)\ .$$

Замеченное свойство позволяет переписать уравнение в виде

$$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\ .$$

Далее, при $x\ge 0$ функция $f(x)$ является произведением двух возрастающих неотрицательных сомножителей x и $\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)$, что гарантирует возрастание $f(x)$ при $x\ge 0$. А в силу нечетности $f(x)$ возрастает и при $x<0$. Тем самым, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Как следствие, равенство $f(2x+1)=f(-3x)$ выполняется только при условии

$$2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-1/5\ .$$

Ответ: $-1/5$.

Монотонная функция принимает любое свое значение в одной-единственной точке. Это простое соображение нередко оказывается полезным.

Пример 6. *Решите систему*

$$\begin{cases}x-y=e^x-e^y,\\ x^2+xy+y^2=12.\end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$x+e^x=y+e^y$$

и рассмотрим функцию $f(x)=x+e^x$. Рассматриваемое уравнение можно теперь записать в виде

$$f(x)=f(y)\ .$$

Функция $f(x)$ является суммой двух возрастающих функций и, следовательно, монотонно возрастает на всей числовой оси. По этой причине последнее равенство выполняется только при условии $x=y$. Подставив $x=y$ во второе уравнение системы и решив квадратное уравнение, получим

Ответ: (2; 2), (–2; –2).

Графики *возрастающей* и *убывающей* функций могут иметь не более одной общей точки. Этот являющийся непосредственным следствием определений факт используется достаточно часто.

Пример 7. *Решите систему*

$$\begin{cases}x^4+y^4=2,\\ x^2y^2+1=2y^2.\end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные

$$a=x^2\ge 0\ ,\quad b=y^2\ge 0\ .$$

Система примет вид

$$\begin{cases}a^2+b^2=2,\\ ab+1=2b.\end{cases}$$

На плоскости aOb нарисуем множества точек, координаты которых удовлетворяют, соответственно, первому и второму уравнениям системы. Первое уравнение описывает окружность радиусом $\sqrt{2}$ с центром в начале координат.

Второму уравнению можно придать вид $a=2-1/b$. Графиком этой функции является гипербола. При $b>0$ последнее уравнение описывает возрастающую функцию, а первое уравнение (при $a\ge 0$) — убывающую функцию $a=\sqrt{2-b^2}$. Следовательно, графики рассматриваемых функций могут иметь лишь единственную общую точку. Сама эта точка угадывается: $a=b=1$. Вернувшись к исходным переменным, получим

Ответ: (1; 1), (1; –1), (–1; –1).

Исследование функций на *монотонность* является ведущей идеей решения многих задач. Однако такое исследование может оказаться не слишком простым делом. Иллюстрацией служит

Пример 8. *Решите уравнение*

$$\log_{12}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)=\frac{1}{2}\log_9(2x)\ .$$

Решение. С целью избавиться от радикалов положим $\sqrt[4]{2x}=a\ge 0$. В результате такой замены уравнение примет вид

$$\log_{12}\left(a^2+a\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\log_9\left(a^4\right)\Leftrightarrow\log_{12}\left(a^2+a\right)=\log_3 a\ .$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$f(a)=\log_{12}a+\log_{12}(a+1)-\log_3 a=0.$$

Займемся исследованием функции $f(a)$:

$$f'(a)=\frac{1}{a\ln 12}+\frac{1}{(a+1)\ln 12}-\frac{1}{a\ln 3}=$$
$$=\frac{1}{a\ln 12}\left(1-\frac{\ln 12}{\ln 3}+\frac{a}{a+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{a\ln 12}\left(1-\log_3 4-\frac{1}{a+1}\right)<0\ .$$

Отрицательность производной означает, что функция $f(a)$ монотонно убывает на всей ее области определения $a>0$. Следовательно, $f(a)$ может обратиться в ноль лишь при одном-единственном значении a. Последнее несложно угадать: $a=3$. Вернувшись к исходной переменной, получим $x=a^4/2=81/2$.

Ответ: 81/2.

Наиболее сложной является ситуация, когда рассматриваемые функции обе возрастают или убывают. В этом случае может потребоваться подробное исследование поведения функций вплоть до построения их графиков.

Пример 9 (МГУ, мехмат, 79). *Решите неравенство*

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}\ .$$

Решение. Приведем неравенство к виду

$$\frac{3}{2x+1}>\frac{\log_2(4+2x)}{2x}\ .$$

В надежде сколько-нибудь упростить дело введем новую переменную $y=2x+1$. Неравенство примет вид

$$\frac{3}{y}>\frac{\log_2(3+y)}{y-1}\ .$$

Начнем с отыскания области определения: $y\in(-3;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$

Руководствуясь идеей *метода интервалов,* рассмотрим соответствующее неравенству уравнение

$$\frac{3}{y}=\frac{\log_2(3+y)}{y-1}\Leftrightarrow 3\left(1-\frac{1}{y}\right)=$$
$$=\log_2(3+y)\ .$$

Заметим, что при $y>0$ обе функции $f(y)$ и $g(y)$ являются *непрерывными* (что существенно для применяемого метода) и монотонно возрастающими. Построим на одном чертеже графики функций

$$f(y)=3\left(1-\frac{1}{y}\right),\quad g(y)=\log_2(3+y)$$

(см. рисунок). Правильность взаимного расположения графиков подтверждается следующей цепочкой неравенств: