Уравнения, которые «не решаются»

А.ЯРСКИЙ

Ненаучная классификация уравнений по принципу «решается — не решается» принадлежит абитуриентам. «Нерешающимися» были названы ими уравнения (неравенства, системы), для решения которых недостаточно упрощающих запись тождественных преобразований, — нужно предложить какие-то оригинальные идеи.

Однако при внимательном рассмотрении выясняется, что «нерешающиеся» уравнения решаются по существу единообразно, а «оригинальные идеи» сводятся к одному — *изучить поведение встречающихся функций*.

Как известно, исследование функции уместно начинать с отыскания ее *области определения*. Иногда одного этого достаточно для решения задачи.

Пример 1 (МГУ, химфак, 83). *Решите неравенство*

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\cdot\left(\log_5 x-1\right)+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0 .$$

Решение. Найдем область определения неравенства:

$$x^2-4x+3\ge 0,\ 8x-2x^2-6\ge 0,\ x>0.$$

Сравнив первое и второе неравенства, получим

$$x^2-4x+3=0,$$

откуда либо $x = 0$, либо $x = 3$.

При $x = 1$ исходное неравенство выполнено. При $x = 3$ левая часть неравенства, равная $\log_5 3 - 2/3$, положительна, так как $\log_5 27 > 2$.

Тем самым $x = 3$ не удовлетворяет неравенству.

Ответ: 1.

В следующей задаче ключом к решению является анализ *областей значений* входящих в уравнение функций.

Пример 2 (МГУ, ВМК, 89). *Найдите все значения p, при которых уравнение*

$$\sqrt{(x+3p-3\pi-4)(|x+\pi|+p-2\pi+2)}+\log_\pi\left(\frac{\pi^2+p^2+4}{2(p-\pi)|x+2|-x^2-4x+2\pi p}\right)=0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

Решение. В левой части уравнения первое слагаемое неотрицательно. Если и второе слагаемое окажется неотрицательным, то равенство будет достигаться лишь при одновременном обращении слагаемых в нуль.

Преобразуем знаменатель стоящего под логарифмом выражения:

$$2(p-\pi)|x+2|-x^2-4x+2\pi p = \pi^2+p^2+4-(|x+2|-(p-\pi))^2\le \pi^2+p^2+4 .$$

Следовательно, стоящее под знаком логарифма выражение не меньше единицы и сам логарифм неотрицателен, — догадка оказалась верной. Итак, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x+3p-3\pi-4)(|x+\pi|+p-2\pi+2)=0,\\ |x+2|-(p-\pi)=0.\end{cases}$$

Остается «техническая» часть решения. Полученная система распадается на две:

$$\begin{cases}x+3(p-\pi)-4=0,\\ |x+2|-(p-\pi)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x+\pi|+p-2\pi+2=0,\\ |x+2|-(p-\pi)=0.\end{cases}$$

В первой системе, прибавив к первому ее уравнению утроенное второе, придем к уравнению $x+3|x+2|=4$. Это уравнение имеет единственное целочисленное решение $x = -5$. Подставив его в систему, получим $p = \pi + 3$.

Сложив уравнения второй системы, придем к соотношению

$$|x+2|+|x+\pi|=\pi-2 .$$

Это уравнение выполнено при всех $x\in[-\pi,-2]$. И так как по условию x — целое число, то $x = -3$ или $x = -2$. Поочередно подставив эти значения в систему, получим равенства $p = \pi + 1$ или $p = \pi$.

Ответ: π; $\pi + 1$; $\pi + 3$.

Необходимость анализа множества значений функции нередко возникает при решении тригонометрических уравнений.

Пример 3. *Решите уравнение*

$$(\sin^2 x-\sqrt2\sin x+1)\times(\sin^4 x+\cos^4 x)=1/4 .$$

Решение. Исследуем область значений первого множителя. Положив $\sin x = y$, запишем этот множитель в виде $f(y) = y^2 - y\sqrt2 + 1$. Графиком $f(y)$ является парабола с направленными вверх ветвями. И так как $y=\sqrt2/2$ — координата вершины параболы, то $f(y)\ge f(\sqrt2/2) = 1/2$.

Преобразуем второй сомножитель:

$$\sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac12\sin^2 2x = 1-\frac14(1-\cos4x)=\frac14(3+\cos4x)\ge 1/2 .$$

Из полученных неравенств следует, что значение $1/4$ левая часть уравнения может принять лишь тогда, когда оба сомножителя принимают свое минимальное значение $1/2$. Последнее равносильно системе

$$\sin x=\sqrt2/2,\quad \cos4x=-1,$$

при решении которой затруднений уже не возникает.

Ответ: $\pi/4+2\pi n$, $3\pi/4+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$.

Решение следующей задачи вновь основано на тщательном исследовании областей значений фигурирующих в системе переменных.

Пример 4 (МГУ, химфак, 78). *Найдите удовлетворяющие условию $z\ge 0$ решения системы*

$$\begin{cases}y+2=(3-x)^2;\\ (2z-y)(y+2)=9+4y;\\ x^2+y^2=4x.\end{cases}$$

Решение. Третье уравнение системы можно переписать в виде

$$(x-2)^2+z^2=4 .$$

Из полученного соотношения следует, что $|z|\le 2$. И так как по условию $z\ge 0$, то $0\le z\le 2$.

Выразим z из второго уравнения системы $(y\ne -2)$:

$$z=\frac12\cdot\frac{(y+3)^2}{y+2} .$$

Решив систему неравенств

$$0\le z\le 2 \Leftrightarrow 0\le\frac{(y+3)^2}{y+2}\le 4 ,$$

получим $y = -3$ или $y = -1$. Остается по найденным значениям y вычислить z и,