Подставляя в это уравнение значение квадрата скорости кубика u, получим уравнение для функции искомого угла α:

$$mgR(1-\cos\alpha)=\left(\frac{1}{2}m\,\mathrm{tg}^2\alpha+M\right)gR\cos^3\alpha\,,$$

или, введя обозначение $\gamma = M/m$:

$$(2\gamma-1)\cos^3\alpha+3\cos\alpha-2=0\,.$$

Это уравнение можно решить, пользуясь известной формулой Кардано, но это не обязательно – вполне можно ограничиться численным (или графическим) решением для нескольких конкретных значений отношения масс. Например, для $\gamma = 1$ получаем $\cos\alpha \approx 0{,}596$, для $\gamma = 2$ получаем $\cos\alpha \approx 0{,}523$, для еще большего значения отношения масс (легкий шар) $\gamma = 50$ получаем $\cos\alpha \approx 0{,}235$. Попробуем теперь уменьшать величину γ, но так, чтобы коэффициент при кубическом слагаемом в уравнении оставался положительным – значение $\cos\alpha$ будет стремиться к $2/3$. При отрицательных значениях этого коэффициента получаются большие значения для $\cos\alpha$ — от $2/3$ до 1.

Дальше все уже просто – скорость кубиков после отрыва не меняется, и скорость шара V перед ударом о плоскость находим при помощи закона сохранения энергии

$$mgH=\frac{mV^2}{2}+Mu^2.$$

При этом $u^2 = gR\cos^3\alpha$, а значения косинуса предельного угла мы находили раньше — подставляя их, найдем ответы для различных соотношений масс.

З.Рафаилов

Ф1630. *На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой M и длиной L. Посредине тележки находится кубик маленького размера, его масса m. Кубику сообщают толчком скорость v по направлению к одному из бортиков тележки. Найдите смещение тележки к тому моменту, когда кубик снова окажется посредине тележки, испытав ровно 17 ударов. Считать удары кубика о бортики тележки абсолютно упругими.*

В этой задаче можно долго и подробно анализировать движение тележки – после первого удара она поедет, после второго остановится, затем снова поедет и т.д. Но ответ можно получить и очень быстро – нужно только учесть, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух тел их относительная скорость остается неизменной (это легко доказать – убедитесь сами) и поэтому интервал между последовательными ударами составит L/v. Всего от начала движения до интересующего нас момента пройдет: полинтервала до первого удара, затем 16 интервалов между ударами (проверьте!) и еще полинтервала между ударами (еще "полтележки»), т.е. $T = 17L/v$. За это время центр масс системы сместится на

$$s=Tv_{\text{цм}}=17\frac{L}{v}\cdot v\frac{m}{M+m}=17L\frac{m}{M+m}.$$

Р.Александров

Ф1631. *Три маленьких заряженных тела одной и той же массы движутся в пространстве вдали от всех других тел. В некоторый момент тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение среднего равно по величине a и ускорение одного из оставшихся в этот момент составляет по величине 3a. Найдите ускорение третьего тела в этот же момент времени.*

Система находится вдали от всех других тел, поэтому ускорение центра масс системы равно нулю. Отсюда сразу можно найти ускорение третьего тела. Действительно, если ускорения первых двух направлены в одну сторону, то ускорение третьего равно $4a$ и направлено в противоположную сторону. Если же исходные ускорения направлены в разные стороны, то ускорение третьего тела равно $2a$ и направлено против ускорения, равного $3a$.

М.Учителев

Ф1632. *Куб с ребром a = 10 см, имеющий массу M = = 1 кг, подвешен на пружине жесткостью k = = 400 Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток маленьких упругих шариков, обладающих скоростью v_0 = 20 м/с на высоте первоначального положения нижней грани куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно вдоль вертикальной оси. Найдите период и амплитуду этих колебаний. Оказывается, колебания эти медленно затухают, хотя никакого трения тут нет. Объясните причину затухания колебаний и оцените время, в течение которого амплитуда уменьшится на 10%. Масса одного шарика m = 1 г, концентрация шариков в потоке n = 1000 $м^{-3}$. Ударами шариков друг о друга пренебречь.*

Ударяясь о нижнюю грань куба и упруго отскакивая, шарики создают почти постоянную (дальше мы уточним эту оценку) силу, направленную вверх. Эта сила смещает положение равновесия куба на пружине вверх, и в системе начинаются колебания.

Оценим величину силы, считая для начала куб неподвижным. За малый отрезок времени τ о грань куба ударятся только те шарики, которые находятся на расстоянии $v_0\tau$ от грани, — таких шариков будет $na^2v_0\tau$. Каждый удар передает кубу импульс $2mv_0$, всего за время τ куб получает импульс $na^2v_0\tau\cdot 2mv_0$. Это дает силу, равную $F = 2na^2mv_0^2$, которая смещает положение равновесия на $s = F/k$. Такой и была бы амплитуда колебаний, если бы не затухание, которое эту амплитуду уменьшает. Период колебаний груза на пружине определяется стандартной формулой $T = 2\pi\sqrt{M/k}$ — это самые обычные колебания груза на пружине.

Сделаем теперь числовые оценки: сила F = 8 Н, смещение s = 0,02 м, период $T \approx$ 0,31 с.

Максимальное значение скорости можно найти из закона сохранения энергии, а можно просто умножить амплитуду на круговую частоту колебаний $\omega = 2\pi/T$ — получим v = 0,4 м/с. Малая амплитуда колебаний позволяет считать, что положение нижней грани почти не меняется и скорость шариков перед ударом можно считать равной v_0. А вот импульс, передаваемый кубу, меняется в зависимости от его скорости – именно этим и объясняется затухание.

Посчитаем силу, действующую на движущийся куб. При скорости куба, направленной вверх и равной u, сила будет равна

$$F=2na^2m(v_0-u)^2=2na^2m\left(v_0^2+u^2\right)-4na^2mv_0u\,.$$