дробно-линейных функций

$$y = f_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1},\ f_2(y) = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}$$

(здесь a_i, b_i, c_i, d_i — некоторые числа) также будет дробно линейной:

$$f_2(f_1(x)) = \frac{a_2(a_1x + b) + b_2(c_1x + d_1)}{a_2(a_1x + b_1) + d_2(a_2x + d_2)} = \frac{Ax + B}{Cx + D}.$$

Пусть $g_{2n}(x) = \frac{ax}{bx + c}$ (мы учли, что $g_{2n}(0) = 0$); поскольку $g_{2n}(1) = 1$, $c = b - a$. Если для некоторого ξ, отличного от 0 и 1,

$$\frac{a\xi}{b\xi + (a - b)} = \xi,$$

то $a = b\xi + a - b$ и, значит, $b = 0$, так что $g_{2n}(x) = x$ (при всех x).

Это и означает, что при любом начальном выборе точки $M_1(x)$ координата $g_{2n}(x)$ точки M_{2n+1} совпадает с x, т.е. ломаная замкнутая.

Интересно выяснить, при каких n существуют такие расположения прямых (соотношения углов α_1, α_2, … …, α_n), при которых ломаные действительно замыкаются. Нетрудно проверить, что при $n = 2$ замыкание происходит только для двух взаимно перпендикулярных прямых, когда оно очевидно.

Замечательно, что для $n = 3$ и вообще для любого нечетного n при любом расположении прямых ломаная получится замкнутой. Докажем это. Рассмотрим композицию первых n функций $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 = g_n$, отображающую точку M_1 с координатой x в точку M_{n+1} с координатой $g_n(x)$. Поскольку n нечетно, $g_n(0) = 1$, $g_n(1) = 0$. Заметим, что если M_1 лежит на отрезке OA_1, $0 < x < 1$, то точка M_{n+1} лежит на симметричном ему отрезке OA_{n+1} той же прямой. Поскольку функция g_n непрерывна, найдется ξ, $0 < \xi < 1$, такое, что $g_n(\xi) = \xi$. При этом $OM_{n+1} = OM_1$ и вторая половина ломаной окажется симметричной первой относительно O; $g_{2n}(\xi) = g_n(g_n(\xi)) = \xi$. Тем самым, по доказанному, и для любой другой точки M_1 ломаная будет замкнутой: M_{2n+1} совпадет с M_1.

Н.Васильев

Ф1628. *Пластинка радиусом 20 см равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая 33 оборота в минуту. От центра пластинки к ее краю ползет строго вдоль радиуса жучок маленького размера, его скорость постоянна по величине и составляет 10 см/с. При каком минимальном коэффициенте трения жучка о поверхность пластинки он сумеет добраться таким образом до края пластинки?*

Ускорение жучка в любой точке определяется силой трения, которая, в свою очередь, связана с коэффициентом трения. Ускорение мы найдем, разделив приращение скорости жучка за очень малый интервал времени τ на продолжительность этого интервала (интервал этот мы выбираем сами).

В нашем случае для расчета полного приращения скорости удобно рассмотреть три его составляющие. Одна из них связана с поворотом линейной (касательной) скорости пластинки ωr на угол $\omega\tau$ — это даст приращение скорости $\Delta v_1 = \omega r\omega\tau$, что обеспечит хорошо известное центростремительное ускорение, равное $\omega^2 r$ и направленное вдоль радиуса к центру. Вторая составляющая связана с поворотом скорости v жучка на тот же угол $\omega\tau$, что дает приращение скорости $\Delta v_2 = \omega\tau v$ и ускорение, равное ωv и направленное перпендикулярно радиусу в направлении вращения. И наконец, третья составляющая приращения скорости связана с тем, что по мере увеличения расстояния от центра вращения увеличивается линейная (касательная) скорость жучка: $\Delta v_3 = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega v\tau$; это дает ускорение, равное ωv и направленное перпендикулярно радиусу в сторону вращения, т.е. она просто складывается со вторым ускорением.

Итак, полное ускорение жучка можно найти, сложив две его перпендикулярные составляющие. Модуль полного ускорения (именно эта величина нас интересует) равен

$$a = \sqrt{\left(\omega^2 r\right)^2 + (2\omega v)^2}.$$

Максимальное по величине ускорение получится у самого края пластинки, где $r = 0{,}2$ м, угловая скорость равна $\omega = 2\pi \cdot 33/60\ \text{с}^{-1} \approx 3{,}46\ \text{с}^{-1}$; при этом $a \approx 2{,}49\ \text{м/с}^2$. Принимая $g = 10\ \text{м/с}^2$, получим минимально необходимый коэффициент трения:

$$\mu = \frac{ma}{mg} \approx 0{,}25.$$

А.Жучков

Ф1629. *Два одинаковых кубика массой M каждый стоят почти соприкасаясь гранями на гладкой горизонтальной поверхности. Сверху на них аккуратно помещают шар массой m, который начинает смещаться вертикально вниз, раздвигая кубики в стороны. Найдите скорость шара непосредственно перед ударом о горизонтальную поверхность. Начальная скорость шара пренебрежимо мала. Радиус шара R, ребро кубика H. Трения нигде нет.*

Шар движется все время вертикально, кубики разъезжаются с одинаковыми скоростями. До некоторого момента шар касается кубиков, затем они разлетаются в стороны, а шар продолжает двигаться, свободно падая. Найдем положение шара, при котором прекратится касание. Обозначим угол между вертикалью и радиусом, проведенным в точку касания, α, скорость кубика u, скорость шара v. Рассмотрим момент перед самым отрывом – шар уже не давит на кубики (а они на него), но касание еще есть. В системе отсчета, которая движется вместе с кубиком, центр шара движется по окружности радиусом R. Его скорость в этой системе отсчета (кстати, это инерциальная система – ускорение кубика перед отрывом можно считать нулевым) равна $u/\cos\alpha$ и его нормальное ускорение определяется только проекцией силы тяжести:

$$a_{\text{н}} = \frac{(u/\cos\alpha)^2}{R} = g\cos\alpha.$$

Мы получили соотношение между скоростью кубика в момент отрыва и косинусом угла α в этот момент. Дополним это соотношение еще одним уравнением для тех же переменных – его можно получить из закона сохранения энергии с учетом того, что $v = u\,\mathrm{tg}\,\alpha$:

$$mgR(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2} + Mu^2 = \frac{mu^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{2} + Mu^2.$$