выражающие $x$, $y$, $z$ через $t$, вида $(3z-t)t = b^2 + c^2 - 2a^2$. С другой стороны, можно показать, что

$$s = \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

и, подставив выражения $x$, $y$, $z$ через $t$ в одно из исходных уравнений, получить

$$s^2 = 3/4\,(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(c+a-b). \quad (*)$$

(Теперь нетрудно видеть, что исходная система имеет решение $x$, $y$, $z$ тогда и только тогда, когда $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника, быть может, вырожденного – ср. с задачей М1090.) Мы должны найти максимальное значение $s^2$ как функции $c$. Поскольку правая часть $(*)$ – квадратный трехчлен от $c^2$, решение можно завершить, в частности для $a = 4$ и $b = \sqrt{3}$, алгебраически. Впрочем, из формулы $(*)$ видно, что $s$ с точностью до коэффициента совпадает с выражением площади по «формуле Герона», и возникает естественная геометрическая интерпретация, о которой шла речь выше.

Из наших выкладок можно извлечь и значения $x$, $y$, $z$, при которых достигается максимум $s$:

$$(x, y, z) = \pm\left(7/\sqrt{31}, 4/\sqrt{31}, 20/\sqrt{31}\right).$$

Отметим, в заключение, выражение для суммы расстояний $t = AT + BT + CT$ от «точки Торричелли» до вершин треугольника $A$, $B$, $C$, которое фигурировало как промежуточный результат:

$$2t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

(Для треугольника с углами не больше 120° точка $T$ замечательна тем, что именно для нее сумма расстояний до вершин – наименьшая.)

*М.Волчкевич, В.Сендеров*

**М1620*.** *Через точку $O$ плоскости проведено $n$ прямых, делящих плоскость на $2n$ углов. В каждый из них вписана окружность, касающаяся сторон на расстоянии 1 от точки $O$. Лучи занумерованы по порядку, начиная с луча $OA_1$ (рис. 1). Для произвольно выбранной на луче $OA_1$ точки $M_1$ строится ломаная $M_1M_2M_3\ldots M_{2n}M_{2n+1}$, вершина $M_i$ которой лежит на $OA_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 2n$), вершина $M_{2n+1}$ — снова на $OA_1$, а звено $M_iM_{i+1}$ касается окружности, лежащей в угле $A_iOA_{i+1}$. Докажите а) для $n = 3$; б) для любого $n$, что если для некоторой точки $M_1$ ломаная оказалась замкнутой ($M_{2n+1} = M_1$), то она получится замкнутой при любом выборе точки $M_1$.*

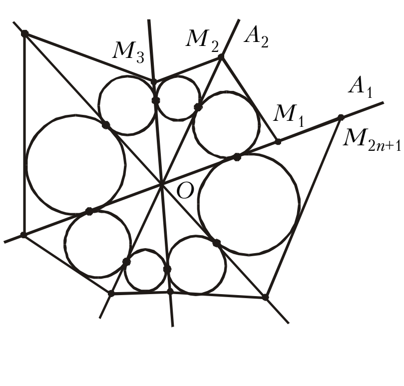

Рис.1

Заметим сразу, что формулировку задачи надо дополнить таким разъяснением. При некотором положении точки $M_1$ (или, аналогично, $M_k$) – а именно, если $OM_1$ немного больше 1, — касательная прямая, проведенная к окружности из $M_1$ (отличная от $OM_1$) пересекает не луч $OA_2$, а прямую $OA_2$ по другую сторону от $O$ – эту точку пересечения следует считать точкой $M_2$ (и из нее проводить касательную к окружности, вписанной в угол $A_2OA_3$); таким образом, ломаная $M_1M_2M_3\ldots$ может получиться не только невыпуклой, но и самопересекающейся. (Строго говоря, возможен еще случай, когда касательная, проведенная из $M_1$, параллельна $OA_2$ — тогда $M_2$ следует считать «бесконечно удаленной» и следующую касательную проводить также параллельно $OA_2$.) Впрочем, если $M_1$ выбрана на отрезке $OA_1$, т.е. $OM_1 < 1$, то подобные оговорки не нужны.

Идею решения задачи можно объяснить одной фразой. Оказывается, функции, выражающие $OM_{k+1}$ через $OM_k$, а также их композиция, выражаются простой формулой – они дробно-линейные, причем удовлетворяют дополнительным условиям, так что при соблюдении условия задачи итоговая функция $OM_1 \to OM_{2n+1}$ оказывается просто тождественной. Объясним это подробнее.

Каждую прямую $OA_k$ мы рассматриваем как числовую ось с началом в точке $O$ и единицей в соответствующей точке $A_k$. Обозначим координату точки $M_k$ на оси $OA_k$ через $x_k$; в частности, пусть $x_1 = x$, $x_2 = y$. Пусть $\angle A_kOA_{k+1} = 2\alpha_k$, и в частности $\alpha_1 = \alpha$.

Подсчитаем площадь треугольника $OM_1M_2$ (рис.2) по формуле $S = pr$, где $p$ – полупериметр, $r = \operatorname{tg}\alpha$ — радиус вписанного круга.

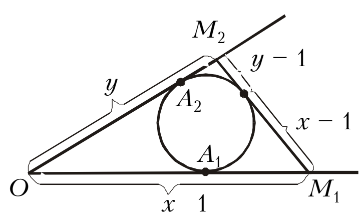

Рис.2

Поскольку $2S = xy\sin 2\alpha$, $2p = x + y + (x-1) + (y-1)$ – здесь используется равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности, — получим: $xy\cos^2\alpha = x + y - 1$. Нетрудно проверить, что такое соотношение выполнено не только при $x > 1$, $y > 1$, как на рисунке 2, или $0 < x < 1$, но и при других значениях $x$, о которых шла речь вначале. Итак (при $x\cos^2\alpha \ne 1$)

$$y = f_1(x) = \frac{x-1}{x\cos^2\alpha - 1}. \quad (*)$$

Аналогичный вид имеет и функция $f_k(x_k) = x_{k+1}$. Положим $g_k = f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_1$, т.е. $g_2(x) = f_2(f_1(x))$, $g_3 = f_3(g_2(x))$ и т.д. Заметим, что $f_k(0) = 1$, $f_k(1) = 0$ – это легко проверить с помощью $(*)$ и аналогичных формул для других $f_k$. Отсюда следует, что при четных $k$, в частности при $k = 2n$, $g_k(0) = 0$ и $g_k(1) = 1$ (при нечетных $k$, наоборот, $g_k(0) = 1$, $g_k(0) = 0$).

Далее, как нетрудно проверить, композиция (последовательное применение) двух, а значит и нескольких,