$= -\vec{OA}/2$ ясно, что середины хорд BC, CA и AB равноудалены от точки O. Значит, $BC = CA = AB$.

При $n \le 9$ в системе векторов, о которой идет речь в задаче, либо в дополняющей ее до n системе не более четырех векторов. По лемме, эту систему можно разбить на правильные k-угольники ($k = 2$ или $k = 3$). Значит, этим же свойством обладает и дополнительная система вершин.

Тем самым, пункты а) – в) задачи решены.

В пункте г) можно рассуждать так. Пусть система содержит вектор (1; 0) и не содержит противоположный вектор (–1; 0). Докажем, что тогда она содержит и векторы $\left(\cos\frac{2\pi}{3};\ \pm\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

В самом деле, среди наших 10 векторов (не считая (1; 0) и противоположного) три пары дают в проекции на ось Ox рациональные числа

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

две другие пары – иррациональные числа; ясно, что получить в сумме из этих чисел нужную минус единицу можно, лишь используя две $(-1/2)$.

Используя результаты статьи «Многочлены деления круга» («Квант» №1, 1998), нетрудно доказать, что при $n = p$ и $n = 2p$, где p – простое число, нетривиальных систем векторов с суммой нуль не существует, а при любом n, имеющем не менее трех разных простых множителей, такая система существует.

Один из способов построения нужных примеров – использование корней многочленов деления круга с коэффициентами +1 и –1; например, равенство многочлена $\Phi_{15}(\xi) = 0$, где ξ — один из корней Φ_{15}, дает пример «неправильной семерки» векторов. Оно же позволяет получить такую же шестерку векторов, как на рисунке.

Однако остается немало вопросов, связанных с этой задачей.

Например, существует ли пример для $n = 15$ (из сказанного выше следует, что для $n < 15$ его нет), для n вида p^α и $p^\alpha q^\beta$, где p и q простые? Существует ли для некоторого n неправильная система из 5 векторов, идущих в вершины правильного n-угольника, с суммой нуль (не содержащая меньших правильных подсистем)? Возможна ли система, которую, в отличие от построенных выше примеров, нельзя получить не только как «сумму», но и как «алгебраическую сумму» (т. е. «сложением» и «вычитанием») правильных подсистем?

Н.Васильев, В.Сендеров

М1619*. *Числа x, y, z удовлетворяют условиям*

$$x^2 + xy + y^2 = 3,\ y^2 + yz + z^2 = 16.$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $xy + yz + zx$.

Ответ: 8.

Самое короткое решение задачи основано на следующей геометрической интерпретации. Заметим, что $x^2 + xy + y^2$ равно квадрату длины третьей стороны треугольника, две стороны которого равны x, y, а угол между ними равен 120°; аналогично можно истолковать и формулу $y^2 + yz + z^2$.

Проведем три оси OX, OY, OZ на плоскости с общим началом O и одинаковым масштабом, составляющие друг с другом угол 120°. Выберем на них соответственно по точке $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ (рис.1). Для того чтобы выполнялись заданные в условии равенства, необходимо и достаточно, чтобы стороны AB и BC треугольника ABC равнялись соответственно $\sqrt{3}$ и 4 (если координаты точек на соседних осях, скажем, x и y, имеют разные знаки, угол AOB будет равен не 120°, а 60°). Величина

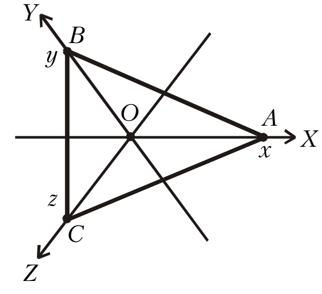

Рис.1

$$S = \frac{1}{2}|xy + yz + zx|\sin 120^\circ = |xy + yz + zx|\frac{\sqrt{3}}{4}$$

равна площади треугольника ABC. Эта площадь не превосходит $AB \cdot BC/2 = 2\sqrt{3}$, поэтому наибольшее значение $xy + yz + zx$ не превосходит 8. Это значение достигается, когда угол ABC – прямой; ясно, что внутри прямоугольного треугольника с катетами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$ можно построить точку T, для которой $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$ (рис.2). Эта точка T будет играть роль начала координат O, и для расстояний $x = AT$, $y = BT$, $z = CT$ достигается равенство $xy + yz + zx = 8$.

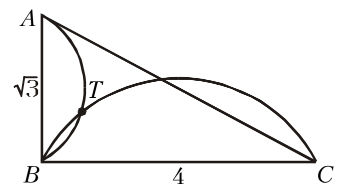

Рис.2

Заметим, что в этом решении используется на самом деле лишь то, что площадь S треугольника ABC не больше $|xy + yz + zx|\sqrt{3}/4$ (а это очевидно, поскольку S не больше суммы площадей AOB, BOC, COA). Тот факт, что всегда выполнено равенство $S = |xy + yz + zx|\sqrt{3}/4$, можно доказать, рассмотрев различные случаи расположения точек A, B, C на осях OX, OY, OZ (рис.3).

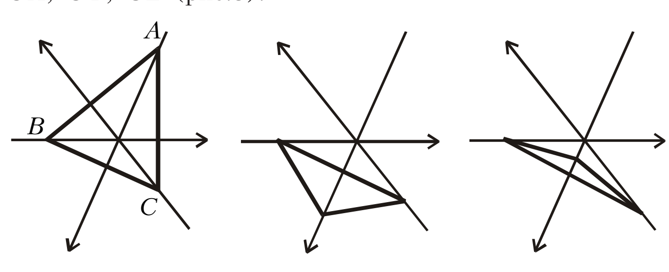

Рис.3

Можно придти к решению и чисто аналитическим путем. Дополним нашу систему условий (напишем ее в самом общем виде) еще одним:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ y^2 + yz + z^2 = b^2, \\ z^2 + zx + x^2 = c^2. \end{cases}$$

Ниже мы считаем a, b, c положительными числами, среди которых хотя бы два различны.

Обозначим $t = x + y + z$, $s = xy + yz + zx$. Вычитая одно из равенств из двух других, получаем уравнения,