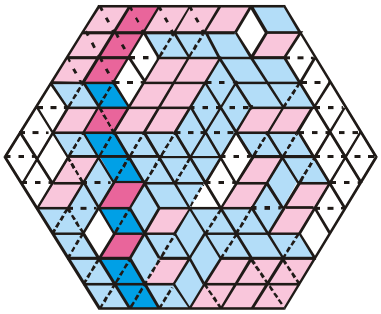


— она параллельна некоторой паре противоположных сторон шестиугольника (в самом деле, если эта сторона не лежит на стороне шестиугольника, к ней примыкает еще один ромб, к противоположной ей стороне этого ромба – следующий ромб и так далее, вплоть до стороны шестиугольника). Таким образом, все ромбы разделяются на три типа: стороны ромбов одного типа параллельны определенным двум из трех направлений (на рисунке ромбы трех типов раскрашены в белый, синий и красный цвета).

Пусть стороны шестиугольника содержат по n единичных отрезков – сторон ромбов (по условию задачи $n = 100$), и одна из сторон горизонтальна. Рассмотрим все ромбы тех двух типов, которые имеют горизонтальную сторону. Они образуют n дорожек, ведущих от верхней стороны шестиугольника к нижней (ведь к каждой горизонтальной стороне верхнего ряда ромбов примыкает снизу ромб с горизонтальной стороной, и так далее – вплоть до ряда из n нижних ромбов). Занумеруем горизонтальные линии сетки, проходящие через точки деления на левых и правых сторонах, по порядку сверху вниз числами 1, 2, … n (диагональ шестиугольника), $n + 1$, …, $2n - 1$. При этом k-я и $(2n - k)$-я линии ($k = 1, 2, \ldots, n$) пересекают шестиугольник по отрезку длины $n + k$. Поскольку каждая горизонтальная линия пересекает n дорожек, то k-я и $(2n - k)$-я линии разрезают ровно k «вертикальных» (на рисунке – белых) ромбов. Итак, для каждого k, $1 \le k < n$, существуют ровно две горизонтальные линии, разрезающие k ромбов (для n ромбов такая линия одна). Разумеется, точно так же обстоит дело и с линиями двух других направлений. Итак, мы получили следующий ответ: при любом разбиении шестиугольника со стороной $n = 100$ на единичные ромбы для $k = 17$ и вообще для каждого k от 1 до 99 существует ровно 6 линий, разрезающих пополам k ромбов (для $k = 100$ таких линий 3 – это диагонали шестиугольника).

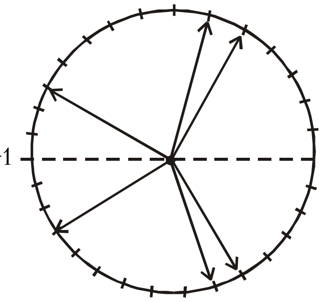
В связи с этой задачей естественно заметить, что количество ромбов каждого типа в любом разбиении также одинаково и равно n^2.

В.Алексеев, Н.Васильев

М1618*. *В вершины правильного n-угольника из его центра проведены n векторов и из них выбраны несколько (не все), сумма которых равна нулю. Докажите, что концы некоторой части выбранной совокупности векторов образуют правильный многоугольник (две симметричные относительно центра точки считаются правильным «двуугольником»), если а) n = 6; б) n = 8; в) n = 9; г) n = 12. д) Будет ли аналогичное утверждение верным при любом n?*

Ответ на общий вопрос д) отрицательный. Приведем пример для $n = 30$, т.е. укажем «неправильную» систему векторов, ведущих из центра $O = (0; 0)$ в некоторые вершины тридцатиугольника, сумма которых равна нулю, среди которых нет k векторов, ведущих в вершины правильного k-угольника при $k = 2$, 3 и 5 (а тем самым и при любом k, не превосходящем 30).

Пусть $A(1; 0)$ – одна из вершин тридцатиугольника, тогда $B(-1; 0)$ – противоположная вершина. Направим векторы в вершины правильного пятиугольника, одна из которых A, и в вершины правильного треугольника, одна из которых B, а затем удалим векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ (они дают в сумме нуль). Оставшиеся шесть векторов (см. рисунок) составляют нужную систему.



Разумеется, здесь (и ниже) мы используем тот факт, что сумма k векторов, ведущих в вершины правильного k-угольника из его центра, равна нулю; это следует, например, из того, что сумма не меняется при повороте всей картины вокруг центра на угол $2\pi/k$. Заметим, что для проекций векторов, один из которых имеет координаты (0; 1), этот факт по существу эквивалентен тождеству

$$1 + \cos\frac{2\pi}{k} + \cos\frac{4\pi}{k} + \ldots + \cos\frac{2(k-1)\pi}{k} = 0$$

(для четного k оно очевидно, для любого k легко доказывается после умножения на $\sin\frac{\pi}{k}$). Аналогично, в примере на рисунке можно провести доказательство прямым подсчетом: чтобы убедиться, что сумма векторов равна нулю, нужно проверить тождество $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (здесь удобно домножить левую часть на $\sin\frac{\pi}{5}$).

Перейдем теперь к отрицательным результатам а) – г), показывающим, что для малых n такой пример не построить. Сформулируем простую лемму. Пусть $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$ — различные единичные векторы. Тогда:

1) если $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, то A, B, C – вершины правильного треугольника;

2) если $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$, то векторы разбиваются на две пары взаимно противоположных (т.е. A, B, C, D являются вершинами прямоугольника).

Докажем 2). Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности в указанном порядке. Тогда из равенства $\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)/2 + \left(\vec{OC}+\vec{OD}\right)/2 = \vec{0}$ следует, что середины хорд AB и CD равноудалены от O, откуда $AB = CD$; аналогично, $BC = DA$, так что $ABCD$ – вписанный параллелограмм, т.е. прямоугольник. Доказательство 1) еще проще: из равенств вида $\left(\vec{OB}+\vec{OC}\right)/2 =$