Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1636» или «Ф1643». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1637 – М1639, М1641 и М1645 предлагались на LXI Московской математической олимпиаде. Задачи Ф1643 – Ф1652 предлагались на Соросовской физической олимпиаде 1998 года.

Задачи М1636—М1645, Ф1643—Ф1652

М1636. Вокруг трапеции нельзя описать окружность. Докажите, что трапеция, образованная серединными перпендикулярами к ее сторонам, подобна исходной.

В.Кириченко

М1637. Квадрат со стороной 1 разрезали на k прямоугольников. Докажите, что сумма длин k наименьших сторон всех треугольников не менее 1.

В.Произволов

М1638. Красный квадрат площадью 1 покрывают более 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

С.Агеев

М1639. Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

Б.Френкин

М1640. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что внутри него существует точка M, для которой AMB и CMD – равнобедренные треугольники с углом 120° при вершине M. Докажите, что тогда существует точка N, для которой BNC и DNA – равносторонние треугольники.

И.Шарыгин

М1641. Есть полубесконечная полоска бумаги, разделенная на клеточки с номерами 1, 2, 3, ..., и n камней. На первой клеточке камень лежит всегда. Разрешается положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно.

А.Шень

М1642. Некоторые стороны клеток шахматной доски 8×8 объявляются перегородками. Расстановка перегородок называется хорошей, если доска остается связной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, минуя перегородки), и плохой – в противном случае. Каких расстановок больше – хороших или плохих?

А.Шаповалов

М1643. а) Существуют ли целые числа a и b ($a \neq 0$) такие, что последовательность $c_n = an! + b$ состоит только из квадратов?
б) Существуют ли целые числа a, b, c ($ab \neq 0$) такие, что для каждого n существует целое x, для которого $ax^2 + bx + c = n!$?

А.Егоров